Irene Venturi

Department of Economics and Management
University of Pisa
Via Cosimo Ridolfi 10, 56124 Pisa, ITALY
e-mail: irene.venturi@ec.unipi.it

1 Algebra classica. Prima parte

Esercizio 1.1 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: il doppio del prodotto di due numeri x e y.

Soluzione. $2xy$. □

Esercizio 1.2 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: la somma dei quadrati di due numeri x e y.

Soluzione. $x^2 + y^2$. □

Esercizio 1.3 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: il prodotto del doppio del primo numero per il doppio del secondo numero.

Soluzione. $2x \cdot 2y = 4xy$. □

Esercizio 1.4 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: la somma fra il primo numero e il doppio del secondo.

Soluzione. $x + 2y$. □

Esercizio 1.5 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: il doppio della somma di due numero x e y.

Soluzione. $2(x + y)$. □

Esercizio 1.6 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: il quadrato della somma dei due numeri.

Soluzione. $(x + y)^2$. $\square$

Esercizio 1.7 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: il prodotto tra il doppio del quadrato di x e la somma dei quadrati di x e di y.

Soluzione. $2x^2 \cdot (x^2 + y^2) = 2x^4 + 2x^2y^2$. $\square$

Esercizio 1.8 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: il prodotto tra il quadrato del doppio di x e la somma dei quadrati di x e di y.

Soluzione. $(2x)^2 \cdot (x^2 + y^2) = 4x^2(x^2 + y^2) = 4x^4 + 4x^2y^2$. $\square$

Esercizio 1.9 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: il quoziente ta la somma dei quadrati e il quadrato della somma.

Soluzione. $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$. $\square$

Esercizio 1.10 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: la differenza tra il triplo del primo numero e un terzo del secondo.

Soluzione. $3x - \frac{1}{3}y$. $\square$

Esercizio 1.11 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: dato un numero naturale n, quanto valela somma dei tre numeri naturali consecutivi.

Soluzione. Dato n il suo consecutivo vale $n + 1$ e il consecutivo di $n + 1$ vale $n + 2$ pertanto la somma equivale a:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3.$$

$\square$

Esercizio 1.12 Scrivi sotto forma di espressione algebrica la seguente frase: dato un numero naturale n somma il doppio di n con il suo consecutivo.

Soluzione. Dato n il suo doppio vale $2n$ e il suo consecutivo $2n+1$ pertanto si ha:

$$2n + (2n + 1) = 4n + 1.$$

□

Esercizio 1.13 Semplifica la seguente espressione:

$$-3x + 7x - 8x - x.$$

Soluzione. $-5x$ □

Esercizio 1.14 Semplifica la seguente espressione:

$$x - \frac{1}{2}x^2 + (\frac{3}{4}x - x) + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{4}x.$$

Soluzione. $x^2 - x.$

□

Esercizio 1.15 Semplifica la seguente espressione:

$$0,2x + \frac{4}{5}y - (-\frac{2}{5}x) + \frac{1}{10}y + \frac{7}{5}y - 2y.$$

Soluzione. $\frac{3}{5}x + \frac{3}{10}y.$

□

Esercizio 1.16 Semplifica la seguente espressione:

$$(-2xy - xy) \cdot (3x - 5x).$$

Soluzione. $(-3xy) \cdot (-2x) = 6x^2y.$ □

Esercizio 1.17 Semplifica la seguente espressione:

$$(-2x^2 + 3x^2) \cdot (-4x^3 - 2x^3).$$

Soluzione. $x^2 \cdot (-6x^3) = -6x^5.$

□

Esercizio 1.18 Semplifica la seguente espressione:

$$(-2x)(-3x) + x^2 + (-3x^2)(2x) - 6x^3.$$

Soluzione. $6x^2 + x^2 - 6x^3 - 6x^3 = 7x^2 - 12x^3.$ □

Esercizio 1.19 Semplifica la seguente espressione:

$$(-a^2)(-a) + (-a)(2a^3) + (-2a^2)(-3a) + (-\frac{1}{3}a^2)(-21a^2).$$

Soluzione. $a^3 - 2a^4 + 6a^3 + 7a^4 = 7a^3 + 5a^4.$ □

Esercizio 1.20 Semplifica la seguente espressione:

$$(-3xy)^2 z + (-xy)^3 z + (-\frac{4}{5}x^2 z)(-\frac{5}{2}y)^2 - (-2xyz)(-3x^2y^2).$$

Soluzione. $9x^2y^2z - x^3y^3z - 5x^2y^2z - 6x^3y3z = 4x^2y^2z - 7x^3y^3z.$ □

Esercizio 1.21 Semplifica la seguente espressione:

$$[-(-2xy)^2]^3 + (-10x^3y^3)^2 - (-5x)(-xy)^2(5xy)(-x^2y^3).$$

Soluzione. $(-4x^2y^2)^3 + (100x^6y^6) - (-5x)(x^2y^2)(5xy)(-x^2y^3) =$
$= -64x^6y^6 + 100x^6y^6 - (25x^6y^6) = 11x^6y^6.$ □

Esercizio 1.22 Semplifica la seguente espressione:

$$(4x^3y^2z) : (-2xy)$$

Soluzione. $-2x^2yz.$ □

Esercizio 1.23 Semplifica la seguente espressione:

$$(5a^3 - 2a^3) : (-2a - 4a).$$

Soluzione. $3a^3 : (-6a) = -\frac{1}{2}a^2.$ □

Esercizio 1.24 Semplifica la seguente espressione:

$$(4a^2b^4)^3 : (-2a^2b^3).$$

Soluzione. $64a^6b^12 : (-2a^2b^3) = -32a^4b^9.$ □

Esercizio 1.25 Semplifica la seguente espressione:

$$[(-2x)^2(-3x) + (-4x^2)^2 : (2x)]^3.$$

Soluzione. $[4x^2(-3x)+16x^4 : 2x]^3 = (-12x^3+8x^3)^3 = (-4x^3)^3 = -64x^9.$ □

Esercizio 1.26 Semplifica la seguente espressione:

$$(\frac{2}{3}x^6y^5) : (-\frac{4}{15}x^4y^4) - 2(-xy)(-x) + 2xy(-3x) - \frac{3}{2}x^2y.$$

Soluzione. $-12x^2y.$ □

Esercizio 1.27 Calcola il M.C.D. e il m.c.m. fra i monomi qui sotto riportati.

$$2x^2y^5z^4 \qquad 4x^3y^9z^3 \qquad 8x^2y^4z^6.$$

Soluzione. M.C.D. $2x^2y^4z^3$ e m.c.m $8x^3y^9z^6$. □

Esercizio 1.28 Calcola il M.C.D. e il m.c.m. fra i monomi qui sotto riportati.

$$3a^2b^2c^2 \qquad 2a^4c^3d \quad 9a^5b^4cd.$$

Soluzione. M.C.D. a^2c e m.c.m. $18a^5b^4c^3d$. □

Esercizio 1.29 Determina la somma e la differenza dei polinoi delle seguenti coppie:

$$x^2 - 2y^2 \qquad -x^2 + 3y^2$$

Soluzione. y^2, $2x^2 - 5y^2$.

□

Esercizio 1.30 Determina la somma e la differenza dei polinoi delle seguenti coppie:

$$\frac{1}{2}x - 2y \qquad \frac{3}{2}x + 2y.$$

Soluzione. $2x$, $-x - 4y$. □

Esercizio 1.31 Dati i tre polinomi

$$x^2 + 3x - 2 \qquad -x^2 + 4x + 5 \qquad 3x^2 - 4x - 4$$

determina il risultato che si ottiene sottraendo dal primo la differenza tra il secondo e il terzo. Poi determina il risultato che si ottiene aggiungendo al secondo la differenza tra il primo e il terzo.

Soluzione. Nel primo caso si ha

$$\begin{gathered}(x^2 + 3x - 2) - [(-x^2 + 4x + 5) - (3x^2 - 4x - 4)] = \\ = (x^2 + 3x - 2) - (-x^2 + 4x + 5 - 3x^2 + 4x + 4) = \\ = x^2 + 3x - 2 + x^2 - 4x - 5 + 3x^2 - 4x - 4 = \\ = 5x^2 - 5x - 11.\end{gathered}$$

Nel secondo caso si ottiene $-3x^2 + 11x + 7$. □

Esercizio 1.32 Determina il polinomio che rappresenta la somma di un numero pari con i primi due numeri naturalli a esso successivi.

Soluzione. Detto $2n$ il numero pari, i due numeri naturali ad esso successivi sono $2n + 1$ e $2n + 2$. Si ottiene quindi il polinomio $6n + 3$. □

Esercizio 1.33 Determina il polinomio che rappresenta la somma di un numero dispari con i primi due numeri naturalli dispari a esso successivi.

Soluzione. Detto $2n + 1$ il numero dispari, i due numeri naturali dispari ad esso successivi sono $2n + 3$ e $2n + 5$. Si ottiene quindi il polinomio $6n + 9$. □

Esercizio 1.34 Semplifica la seguente espressione:

$$2x(x + 4) - (-2x)^2 - 6 + (3 + x)(2 - 2x) + (2x)^2 - 4x.$$

Soluzione. 0. □

Esercizio 1.35 Semplifica la seguente espressione:

$$(x^2-4x)(x^2+4x)-(x^2+x)(x^2-x)+13x^2.$$

Soluzione. $x^4-16x^2-x^4+x^2+13x^2=-2x^2.$ □

Esercizio 1.36 Semplifica la seguente espressione:

$$(a-1)(a+3)(a+1)-(a^2-1)(a+3)+(a+2)(a-2).$$

Soluzione. $(a^2-1)(a+3)-(a^2-1)(a+3)+a^2-4=a^2-4.$ □

Esercizio 1.37 Semplifica la seguente espressione:

$$2x(x^2-1)-3x(x^2+1)+x^2(x+1)(x-1).$$

Soluzione. $2x^3-2x-3x^3-3x+x^3-x^2=-5x-x^2.$ □

Esercizio 1.38 Semplifica la seguente espressione:

$$(x+2y)^2-(x-2y)^2+(4xy+1)^2-(4xy+1)(4xy-1).$$

Soluzione.

$$x^2+4y^2+4xy-x^2-4y^2+4xy+16x^2y^2+1+8xy-16x^2y^2+1=$$

$$=16xy+2.$$

□

Esercizio 1.39 Semplifica la seguente espressione:

$$(2x+2y)(2x-2y)+(x-y)^2+(2xy+1)(2xy-1)-5x^2+3(y^2-1).$$

Soluzione. $4x^2-4y^2+x^2+y^2-2xy+4x^2y^2-1-5x^2+3y^2-3=$

$$=-2xy+4x^2y^2-4.$$

□

Esercizio 1.40 Semplifica la seguente espressione:

$$(2x+1)^3 - 2x(2x+1)^2 - 4x^2 - 1.$$

Soluzione. $8x^3 + 1 + 12x^2 + 6x - 2x(4x^2 + 1 + 4x) - 4x^2 - 1 =$

$$= 8x^3 + 1 + 12x^2 + 6x - 8x^3 - 2x - 8x^2 - 4x^2 - 1 = 4x.$$

□

Esercizio 1.41 Semplifica la seguente espressione:

$$(a+2b)(a-2b) - 2(a+2b)^2 + a^2 + 8a(b-1)$$

Soluzione. $a^2 - 4b^2 - 2a^2 - 8b^2 - 8ab + a^2 + 8ab - 8a = -12b^2 - 8a.$ □

Esercizio 1.42 Semplifica la seguente espressione:

$$(x-1)^2(x+1)^2 - (x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1).$$

Soluzione. x^2. □

Esercizio 1.43 Semplifica la seguente espressione:

$$(3-2a)^2 + (2+3a)(2-3a) + 5a^2 - 13.$$

Soluzione. $-12a$. □

Esercizio 1.44 Semplifica la seguente espressione:

$$(y-1)^3 - (y+1)^3 + (y+-1)^2 - (y+1)^2 + y - 1 - 3(y+1).$$

Soluzione. $-6y^2$. □

Esercizio 1.45 Dato n numero naturale intero, somma ad n il doppio del suo successivo e sottrai il triplo del suo precedente.

Soluzione. $n + 2(n+1) - 3(n-1) = n + 2n + 2 - 3n + 3 = 5$ □

Esercizio 1.46 Dato n numero naturale intero, moltiplica n con il doppio del suo precedente e al risultato aggiungi il triplo di n.

Soluzione. $n \cdot 2(n-1) + 3n = 2n^2 + n$ □

Esercizio 1.47 Dati due numeri reali a e b, al doppio del quadrato della loro somma sottrai il doppio del quadrato della loro differenza.

Soluzione. $2(a+b)^2 - 2(a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 4ab - 2a^2 - 2b^2 + 4ab = 8ab$. □

Esercizio 1.48 Dati due numeri reali a e b, aggiungi l'opposto di $4a^2 + 9b^2$ al quadrato della somma tra il doppio del primo e il triplo del secondo.

Soluzione. Aggiungo a $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 12ab$ l 'opposto di $4a^2 + 9b^2$ e rimane $12ab$. □

Esercizio 1.49 Dati due numeri reali a e b, al quadrato della loro somma aggiungi il quadrato della loro differenza e sottrai dal risultato ottenuto il doppio del prodotto fra la loro somma e la loro differenza.

Soluzione. $[(a+b)^2 + (a-b)^2] - [2(a+b)(a-b)] = 4b^2$. □

Esercizio 1.50 Dati due numeri reali a e b, sottrai al quadrato della differenza tra il primo e il doppio del secondo, il quadrato tra la somma del doppio del primo e il secondo.

Soluzione. $(a - 2b)^2 - (2a + b)^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab - (4a^2 + b^2 - 4ab) =$

$$= -3a^2 + 3b^2.$$

□

Esercizio 1.51 Scomponi i seguenti polinomi:

$$3x(x+y) - 3y(x+y) \qquad 2(x+1)x^2 - 4x(x+1)$$

Soluzione. Le soluzioni sono $3(x+y)(x-y)$ e $2x(x-2)(x+1)$. □

Esercizio 1.52 Scomponi i seguenti polinomi:

$$9x^2(x+5) - 3x(x+5) \qquad -(x-2) + x(2-x)$$

Soluzione. Le soluzioni sono $3x(x-1)(x+5)$ e $(x-2)(-1-x)$. $\square$

Esercizio 1.53 Scomponi i seguenti polinomi:

$$x^9 - 2x^6 + x^7 - 2x^4 \qquad x^2y - xy^2 + xy(x-y)^2$$

Soluzione. Le soluzioni sono $x^4(x^2+1)(x^3-2)$ e $xy(x-y)(1+x-y)$. $\square$

Esercizio 1.54 Scomponi il seguente polinomio:

$$(x+2)^2 - y^2$$

Soluzione. $(x+2+y)(x+2-y)$. $\square$

Esercizio 1.55 Scomponi il seguente polinomio:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2$$

Soluzione. Come differenza di quadrati si scompone poi si calcola:

$$[(a+b)+(a-b)] \cdot [(a+b)-(a-b)] = 2a \cdot 2b.$$

$\square$

Esercizio 1.56 Scomponi il seguente polinomio:

$$a^6 - (a-2)^2.$$

Soluzione. $(a^3-a+2)(a^3+a-2)$. $\square$

Esercizio 1.57 Scomponi i seguenti polinomi:

$$x^2 + 4 + 4x \qquad 4x^2 - 4x + 1$$

Soluzione. $(x+2)^2$ e $(2x-1)^2$. $\square$

Esercizio 1.58 Scomponi i seguenti polinomi:

$$x^4y^2 - 6x^3y^3 + 9x^2y^4 \qquad 4y^2 + 2x^2y + \frac{1}{4}x^4$$

Soluzione. $(x^2y - 3xy^2)^2$ e $(\frac{1}{2}x^2 + 2y)^2$. □

Esercizio 1.59 Scomponi il seguente polinomio:

$$a^4 - 4a^2 + 4 - 4b^2$$

Soluzione. $(a^2 - 2)^2 - 4b^2 = (a^2 - 2 - 2b)(a^2 - 2 + 2b)$. □

Esercizio 1.60 Scomponi il seguente polinomio:

$$x^{10} - x^4 - 6x^2 - 9$$

Soluzione. $(x^5 - x^2 - 3)(x^5 + x^2 + 3)$. □

Esercizio 1.61 Scomponi i seguenti polinomi:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \qquad 27x^6 - 54x^4 + 18x^2 - 8$$

Soluzione. Le soluzioni sono $(x - 2)^3$ e $(3x^2 - 2)^3$. □

Esercizio 1.62 Scomponi i seguenti polinomi:

$$x^3 - 8 \qquad 1000 - a^3$$

Soluzione. Le soluzioni sono $(x-2)(x^2+2x+4)$ e $(10-a)(100+10a+a^2)$. □

Esercizio 1.63 Scomponi i seguenti polinomi:

$$x^4 - x^2y^2 \qquad 3a^2 - 6a + 3$$

Soluzione. Le soluzioni sono $x^2(x + y)(x - y)$ e $3(a - 1)^2$. □

Esercizio 1.64 Scomponi il seguente polinomio:

$$3x(y^2 - 1) + 2y^2 - 2$$

Soluzione. Si raccoglie totalmente poi si usano i prodotti notevoli:

$$(y^2-1)(3x+2) = (3x+2)(y+1)(y-1).$$

□

Esercizio 1.65 Scomponi il seguente polinomio:

$$x^5 - x^3 + 8x^2 - 8$$

Soluzione. Si raccoglie parzialmente poi totalmente e si usano i prodotti notevoli:

$$x^3(x^2-1) + 8(x^2-1) =$$
$$= (x^3+8)(x+1)(x-1) = (x+2)(x^2-2x+4)(x+1)(x-1).$$

□

Esercizio 1.66 Scomponi i seguenti polinomi:

$$x^2 + 9x + 20 \qquad x^2 - 3x - 28$$

Soluzione. Usando somma e prodotto si scompongono come segue:

$$(x+4)(x+5) \qquad (x+4)(x-7).$$

□

Esercizio 1.67 Scomponi i seguenti polinomi:

$$a^2 - 7a - 30 \qquad a^2 + 5a - 50$$

Soluzione. Usando somma e prodotto si scompongono come segue:

$$(a+3)(a-10) \qquad (a+10)(a-5).$$

□

Esercizio 1.68 Scomponi il trinomio:

$$2x^2 - 5x - 3.$$

Soluzione. Si cercano due numeri che hanno come somma -5 e prodotto $2 \cdot (-3) = -6$ quindi sono 1 e -6 quindi si ha:

$$2x^2 - 5x - 3 = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x(x-3) + (x-3) = (x-3)(2x+1).$$

□

Esercizio 1.69 Scomponi il trinomio:

$$3x^2 + 14x - 5.$$

Soluzione. Si cercano due numeri che hanno come somma $+14$ e prodotto $3 \cdot (-5) = -15$ quindi sono -1 e $+15$ quindi si ha:

$$3x^2 + 14x - 5 = 3x^2 - x + 15x - 5 = x(3x-1) + 5(3x-1) = (x+5)(3x-1).$$

□

Esercizio 1.70 Scomponi i seguenti trinomi:

$$2x^2 + x - 3 \qquad 15x^2 + 7x - 2.$$

Soluzione. $(a-1)(2a+3)$ e $(3x+2)(5x-1)$. □

Esercizio 1.71 Determina il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo tra i seguenti polinomi:

$$x^2 + x \qquad x^2 - 1 \qquad x^2 - 2x + 1$$

Soluzione. Si calcola la scomposizione dei polinomi:

$$x(1+x) \qquad (x-1)(x+1) \qquad (x-1)^2.$$

Pertanto il M.C.D. vale 1 e il m.c.m. $x(x-1)^2(x+1)$. □

Esercizio 1.72 Determina il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo tra i seguenti polinomi:

$$x^3 + x \qquad x^2 + 1 \qquad x^4 + 2x^2 + 1$$

Soluzione. Si calcola la scomposizione dei polinomi:

$$x(1+x^2) \qquad x^2+1 \qquad (x^2+1)^2.$$

Pertanto il M.C.D. vale x^2+1 e il m.c.m. $x(x^2+1)^2$. □

Esercizio 1.73 Determina il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo tra i seguenti polinomi:

$$x^3-4x^2 \qquad x^2-16 \qquad x^2-8x+16.$$

Soluzione. Pertanto il M.C.D. vale $x-4$ e il m.c.m. $x^2(x-4)^2(x+4)$. □

Esercizio 1.74 Determina il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo tra i seguenti polinomi:

$$x^2-4 \qquad x^2-x-2 \qquad x^4-4x^2+4$$

Soluzione. Si calcola la scomposizione dei polinomi:

$$x(1+x^2) \qquad x^2+1 \qquad (x^2+1)^2.$$

Pertanto il M.C.D. vale $x-2$ e il m.c.m. $x(x-2)^2(x+2)(x+1)$. □

Esercizio 1.75 Risolvi la seguente equazione:

$$(3x+5)(5-x)(2-x)=0$$

Soluzione. $x=2,5,-\frac{5}{3}$. □

Esercizio 1.76 Risolvi la seguente equazione:

$$(x+1)(2x-4)(3x+9)=0$$

Soluzione. $x=-3,-1,2$. □

Esercizio 1.77 Risolvi la seguente equazione:

$$(x^2-1)(x^2-9)=0$$

Soluzione. $x = -3, -1, 1, 3$. □

Esercizio 1.78 Risolvi la seguente equazione:

$$x^4 - x^2 = 0$$

Soluzione. Si scompone l'equazione e si ottiene $x^2(x^2 - 1) = 0$ poi si calcolano le radici che sono$x = -1, 0, 1$. □

Esercizio 1.79 Risolvi la seguente equazione:

$$9x^3 - 4x = 0.$$

Soluzione. Le soluzioni sono $x = -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}$. □

Esercizio 1.80 Risolvi la seguente equazione:

$$2x^2(x^2 - 4) + 3x(x^2 -) - 5(x^2 - 4) = 0$$

Soluzione. Le soluzioni sono $x = -\frac{5}{2}, -2, 1, 2$. □

Esercizio 1.81 Stabilisci se le seguenti equazioni sono equivalenti:

$$x^2 - x = 0 \qquad x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Soluzione. Sono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni. La prima equazione ha soluzioni $x = 0, 1$ e la seconda $x = 1$. Pertanto non sono equivalenti □

Esercizio 1.82 Stabilisci se le seguenti equazioni sono equivalenti:

$$x^3 - 2x^2 + x = 0 \qquad 4x^2 - 4 = 0.$$

Soluzione. Sono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni. La prima equazione si scompone $x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$ ha soluzioni $x = 0, 1$ e la seconda $x = -1, 1$. Pertanto non sono equivalenti □

Esercizio 1.83 Risolvi la seguente equazione:

$$[(x - 1)^2 - x^2]^2 = (2x - 1)(2x + 1) - 10$$

Soluzione. La soluzione vale $x = 3$. $\square$

Esercizio 1.84 Risolvi la seguente equazione:

$$2(x-2)(x+2) = x^2 + (x-4)^2$$

Soluzione. La soluzione vale $x = 3$. $\square$

Esercizio 1.85 Risolvi la seguente equazione:

$$(a+3)(a-2) + (a-2)(a+2) = (a-1)^2 + (a+2)^2$$

Soluzione. La soluzione vale $a = -15$. $\square$

Esercizio 1.86 Risolvi la seguente equazione:

$$(x-1)(x+1) + (x-1)^2 = (2x-1)(x+3)$$

Soluzione. La soluzione vale $x = \frac{3}{7}$. $\square$

Esercizio 1.87 Risolvi la seguente equazione:

$$(5x-1)^2 - (x+5)(x-5) - 24x^2 = 2(13-5x)$$

Soluzione. Indeterminata. $\square$

Esercizio 1.88 Risolvi la seguente equazione:

$$(x-2)^2 - (1-x)(x-2) = 2(x-3)(x+3) - 7x$$

Soluzione. Impossibile. $\square$

Esercizio 1.89 Risolvi la seguente equazione:

$$2x - [3x - (x-2)] = -2$$

Soluzione. Indeterminata. $\square$

Esercizio 1.90 Risolvi la seguente equazione:

$$(3x+1)(2x-1)+(2x+1)(3x-2)=12(x-3)(x+1)$$

Soluzione. $x=-\frac{3}{2}$. $\square$

Esercizio 1.91 La somma tra il doppio di un numero e il triplo dello stesso vale 20. Quale é il numero?

Soluzione. Detto a il numero l'equazione associata si ottiene $2a+3a=20$ da cui si deduce che $a=4$. $\square$

Esercizio 1.92 Determina tre numeri pari consecutivi la sui somma vale 90.

Soluzione. Detto $2a$ il primo numero pari si ha che il suo primo consecutivo vale $2a+2$ e il secondo $2a+4$ da cui l'equazione $6a+6=90$ equivalente a $6a=84$ da cui si ottien $a=14$. Pertanto il primo numero pari vale 28 e i consecutivi 30 e 32. $\square$

Esercizio 1.93 Due numeri a e b sono uno doppio dell'altro e sono tali che sottraendo al maggiore 9 si ottien la metá del minore. Determina a e b.

Soluzione. Essendo uno doppio dell'altro, scelto a si ha che $b=2a$ che corrisponde anche al maggiore. Pertanto l'equazione risulta essere:

$$2a-9=\frac{1}{2}a \qquad 2a-\frac{1}{2}a=9 \qquad \frac{3}{2}a=9 \qquad a=6.$$

Pertanto $a=6$ e $b=12$. $\square$

Esercizio 1.94 Due numeri differiscono di 3 e la metá del maggiore supera di 2 un terzo del minore. Trova i due numeri.

Soluzione. Detti a e b i due numeri si ha che $a-b=3$ pertanto $a=b+3$ che per come si costruisce risulta il maggiore. Pertanto si ottiene l'equazione da risolvere:

$$\frac{1}{2}(b+3)=\frac{1}{3}b+2 \qquad \frac{1}{2}b-\frac{1}{3}b=2-\frac{3}{2} \qquad b=$$

$\square$

Esercizio 1.95 In un rettangolo la base vale il doppio della altezza. Se si aumentano la base di 3 cm e l'altezza di 5 cm l'area aumenta di 41 cm^2. Determina le misure della base e dell'altezza del rettangolo.

Soluzione. 4cm, 2cm. □

Esercizio 1.96 Scrivi sottoforma di disequazione le seguenti frasi:
l'insieme dei numeri reali maggiori di 3;
l'insieme dei numeri reali maggiori uguali di -2;
l'insieme dei numeri reali minori di -1;
l'insieme dei numeri reali minori uguali di 7.

Soluzione. $x > 3$, $x \geq -2$, $x < -1$, $x \leq 7$. □

Esercizio 1.97 Scrivi sottoforma di disequazione le seguenti frasi:
l'insieme dei numeri compresi tra 1 e5;
l'insieme dei numeri compresi tra -2 e3 estremi inclusi;
l'insieme dei numeri compresi tra 0 e2, 2 incluso ;
l'insieme dei numeri compresi tra -10 e50, -10 incluso.

Soluzione. $1 < x < 5$; $-2 \leq x \leq 3$; $0 < x \leq 2$; $-10 \leq x < 50$. □

Esercizio 1.98 Risolvi la seguente disequazione:

$$2x - 3 > 4x - 7.$$

Soluzione. $x < 2$. □

Esercizio 1.99 Risolvi la seguente disequazione:

$$2(x - 1) > -3(2 - x).$$

Soluzione. $x < 4$. □

Esercizio 1.100 Risolvi la seguente disequazione:

$$3(x - 1) - 2(x + 2) < -3(x - 1).$$

Soluzione. $x < \frac{5}{2}$. □

Esercizio 1.101 Risolvi la seguente disequazione:

$$2(x-1)-3(x+1)<-2[-x+(x-1)].$$

Soluzione. $x>-7$. □

Esercizio 1.102 Risolvi la seguente disequazione:

$$(x-3)(x+3)\geq x^2.$$

Soluzione. Impossibile. □

Esercizio 1.103 Risolvi la seguente disequazione:

$$(-x+2)(x+2)\geq -x^2.$$

Soluzione. Sempre verificata. □

Esercizio 1.104 Risolvi la seguente disequazione:

$$(x-1)^2-(x-2)^2>2x-4.$$

Soluzione. Sempre verificata. □

Esercizio 1.105 Risolvi la seguente disequazione:

$$(x-1)^3-(x+1)^3\geq (x-1)^2-7(x-1)(x+1).$$

Soluzione. $x\geq 5$. □

Esercizio 1.106 Risolvi la seguente disequazione:

$$x^2-4(2x-1)(2x+1)\geq (1-3x)(1+3x)+6x^2.$$

Soluzione. Impossibile □

Esercizio 1.107 In un risultato di tre partite la squadra rossa ha totalizzato 3, 3 e 2 punti. Per garantirsi l'accesso alle finali deve raggiungere almeno 9 punti. Quanti punti deve fare nella quarta partita?

Soluzione. Si deve risolvere la disequazione $3+3+2+x \geq 9$ pertanto $x \geq 1$. □

Esercizio 1.108 Un signore guadagna ogni mese 800 euro al mese 75 euro per ogni lavoro in assegnato in piú. Se vuole guadagnare pi'ďi 1500 euro al mese quanti lavori in piú deve fare?

Soluzione. Si ha la disequazione $800 + 75x \geq 1500$ da cui $x \geq \frac{28}{3}$ quindi almeno 10. □

Esercizio 1.109 In un test Lucia ha totalizzato rispettivamente 40 e 28 punti. Quale punteggio deve totalizzare al terzo test per ottenere almeno una media di 45 punti?

Soluzione. La disequazione $\frac{40+28+x}{3} \geq 45$ da cui almeno 67 punti. □

Esercizio 1.110 Dato un numero intero a la somma di a con il suo quadruplo supera di 3 il suo triplo.

Soluzione. La disequazione: $a + 5a \geq 3 + 3a$ da cui si ottiene $a \geq 1$. □

Esercizio 1.111 Dato un numero reale a la somma di a con la sua metá e $\frac{1}{3}a$ supera di almeno 2 il doppio di a.

Soluzione. La disequazione da risolvere: $a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a \geq 2 + 2a$. Da cui si ottiene $6a + 3a + 2a \geq 12 + 12a$ pertanto si ottiene $a \leq -12$. □

Esercizio 1.112 Risolvi il seguente sistema di disequazioni lineari:

$$\begin{cases} x(x+1) \geq (x-2)(x+2) - 2(x-1) \\ (x-1)^2 < (x-2)(x+3). \end{cases}$$

Soluzione. Si risolve:

$$\begin{cases} x^2 + x \geq x^2 - 4 - 2x + 2 \\ x^2 + 1 - 2x < x^2 + x - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ -3x < -7. \end{cases}$$

Pertanto sono verificate entrambe per $x > \frac{7}{3}$. □

Esercizio 1.113 Risolvi il seguente sistema di disequazioni lineari:

$$\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ -x > 3(x+1). \end{cases}$$

Soluzione.

$$\begin{cases} 2x > 3 \\ -4x > 3. \end{cases}$$

Le due disequazioni non sono verificate contemporaneamente entrambe. Quindi il sistema risulta impossibile. □

Esercizio 1.114 Risolvi il seguente sistema di disequazioni lineari:

$$\begin{cases} x-1 > 2x \\ 2(3-x) > 4x \\ x+1 \geq -2(2-x). \end{cases}$$

Soluzione.

$$\begin{cases} -x > 1 \\ -6x > -6 \\ -x \geq -5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x < 1 \\ x \leq 5. \end{cases}$$

Pertanto la soluzione si ha per $x < -1$. □

1 Geometria analitica

1.1 Piano cartesiano e retta.

Esercizio 1.1 Stabilisci quali tra i seguenti punti appartengono al primo, al secondo, al terzo e al quarto quadrante:
a) A(1,2)
b) B(-1, -3)
c) C(2, -4)
d) D(-2, 2).

Soluzione. A sta nel I quadrante, B sta nel III quadrante, C sta nel IV quadrante, D sta nel II quadrante. □

Esercizio 1.2 Stabilisci quali tra i seguenti punti appartengono all'asse delle ascisse e quali all'asse delle ordinate:

$$O = (0; 0),\ A = (-3; 0),\ B = (0; -1),\ C = (0; 10)$$

Soluzione. A sta sull'asse delle ascisse, B e C stanno sull'asse delle ordinate. Per quanto riguarda il punto $(0; 0)$ rappresenta l'origine degli assi cartesiani. □

Esercizio 1.3 Calcola il punto medio tra i seguenti punti:

a) $A = (0; 1)$ e $B = (4; 5)$;

b) $C = (-2; -4)$ e $D = (2, 4)$;

c) $E = (-1, 4)$ e $F = (1, -2)$.

Soluzione. Il punto medio è di *a*) $M = \left(\frac{0+4}{2}; \frac{1+5}{2}\right) = (2; 3)$. Mentre per *b)* il punto medio è $M = \left(\frac{-2+2}{2}; \frac{-4+4}{2}\right) = (0; 0)$. Si lascia per esercizio il punto *c)*. □

Esercizio 1.4 Calcola la distanza tra i seguenti punti:

a) $A = (0; 1)$ e $B = (3; 5)$;

b) $C = (2; 4)$ e $D = (2, -6)$;

c) $E = (-1, 4)$ e $F = (-1, 5)$.

Soluzione. Pertanto per il punto *a)* la distanza è $\overline{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. Per *b), c)* si hanno due casi particolari: in *b)* i punti hanno la stessa ascissa, in *c)* invece hanno la stessa ordinata. In questi casi la formula si semplifica e le distanze diventano $\overline{CD} = |-6-4| = |-10| = 10$ e $\overline{EF} = |5-4| = 1$. □

Esercizio 1.5 Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per le seguenti coppia di punti:

$$O = (0,0) \qquad A = (1,3).$$

Soluzione. $m = 3$ □

Esercizio 1.6 Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per le seguenti coppia di punti:

$$A = (1,1) \qquad B = (3,3).$$

Soluzione. $m = \frac{3-1}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$. □

Esercizio 1.7 Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per le seguenti coppia di punti:

$$A = (-1,1) \qquad B = (2,-3).$$

Soluzione. $m = \frac{-3-1}{2+1} = -\frac{4}{3}$. □

Esercizio 1.8 Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per le seguenti coppia di punti:

$$A = (3,-2) \qquad B = (-1,0).$$

Soluzione. $m = \frac{0+2}{-1-3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. □

Esercizio 1.9 Si calcoli l'equazione della retta passante per $A = (1;2)$ e $B = (3;5)$.

Soluzione. Dati due punti del piano $P = (x_1; x_2)$ e $Q = (y_1; y_2)$ l'equazione della retta passante per P e Q è data da:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Pertanto si ha

$$y - 2 = \frac{5 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$

da cui l'equazione $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. □

Esercizio 1.10 Scrivere l'equazione della retta passante per le seguenti coppia di punti:

$$A = (3, -2) \qquad B = (-1, 0).$$

Soluzione. Dalla formula si ha che

$$y + 2 = \frac{0 + 2}{-1 - 3}(x - 3) \qquad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

. □

Esercizio 1.11 Scrivere l'equazione della retta passante per le seguenti coppia di punti:

$$A = (-1, -2) \qquad B = (3, 3).$$

Soluzione. Dalla formula si ha che

$$y + 2 = \frac{3 + 2}{3 + 1}(x + 1) \qquad y = \frac{5}{4}x + \frac{5}{4} - 2$$

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4} \qquad 4y - 5x + 3 = 0.$$

. □

Esercizio 1.12 Dopo aver individuato il coefficiente angolare e la quota delle seguenti rette, scrivi la loro forma esplicita:

a) $-x + y - 2 = 0$;

b) $2x + 3y - 6 = 0$;

c) $-4y - 8 = 0$

d) $2x - 5 = 0$.

Soluzione. Per l'equazione *a)* si ottiene $m = 1$ e $q = 2$ da cui $y = x + 2$; mentre per l'equazione *b)* si ha $m = -\frac{2}{3}$ e $q = 2$ da cui $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Per quanto riguarda l'equazione *c)* si ha $a = 0$ quindi $m = 0$ e $q = -2$ da cui la retta $y = -2$. Nel caso in cui $b = 0$ l'equazione della retta è parallela all'asse y. Pertanto per la retta del punto *d)* si ha $x = \frac{5}{2}$ □

Esercizio 1.13 Si scriva l'equazione della retta passante per il punto $A = (1, 2)$ con coefficiente angolare $m = -2$.

Soluzione. L'equazione della retta passante per un punto con coefficient angolare assegnato m è data dall'equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$. Pertanto l'equazione cercata è $y - 2 = -2(x - 1)$ da cui si ha $y = -2x + 4$. □

Esercizio 1.14 Data la retta r di equazione $2x+4y-6 = 0$ trova l'equazione della retta parallela ad essa e passante per il punto $A = (3; 1)$.

Soluzione. Nel piano cartesiano date due rette si dicono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare. Data quindi la retta r che ha coefficiente angolare $m = -\frac{1}{2}$, la parallela ad essa passante per il punto A è data da

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

da cui $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. □

Esercizio 1.15 Data la retta s di equazione $3x+2y-5 = 0$ trova l'equazione della retta perpendicolare ad essa e passante per il punto $A = (1; 2)$.

Soluzione. Nel piano cartesiano date le rette di equazioni

$$y = mx + q \qquad y = m'x + q'$$

si dicono perpendicolari se è verificata la seguente relazione tra i loro coefficienti angolari $m \cdot m' = 1$. Pertanto data la retta s che ha coefficiente angolare $m = -\frac{3}{2}$, la perpendicolare ad essa passante per il punto A è data da

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

da cui $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$. □

Esercizio 1.16 Determina l'equazione della retta passante per $P(1, 2)$ parallela alla retta $y = 3x$

Soluzione. La retta generica parallela alla retta assegnata è $y = 3x + q$, passante per P si ottiene $q = 2 - 3 = -1$ da cui si deduce $y = 3x - 1$. □

Esercizio 1.17 Determina l'equazione della retta passante per $P(1, 2)$ parallela alla retta $y + 4 = 0$

Soluzione. La retta generica parallela alla retta assegnataè $y = k$, passante per P si ottiene $k = 2$ da cui si dedce $y - 2 = 0$. □

Esercizio 1.18 Determina l'equazione della retta passante per $P(1, 2)$ parallela alla retta $2x + y + 3 = 0$

Soluzione. La retta generica parallela alla retta assegnata ha coefficiente angolare $m = -2$, passante per P si ottiene $2 = -2 + q$ da cui si deduce $q = 4$ pertanto $y = -2x + 4$. □

Esercizio 1.19 Si calcoli l'equazione dell'asse del segmento di estremi i punti $A = (1; 2)$ e $B = (3; -4)$.

Soluzione. L'asse di un segmento di estremi A e B detto $\overline{AB}$, è la retta perpendicolare ad $\overline{AB}$ passante per suo il punto medio M.

Pertanto assegnati i punti $A = (1; 2)$ e $B = (3; -4)$ si calcolano rispettivamente, il coefficiente angolare m della retta passante per A e B e il punto medio M tra A e B:

$$m = \frac{-6}{2} = -3 \qquad M = (2; -1).$$

L'equazione dell'asse del segmento $\overline{AB}$ è quindi data dalla retta passante per M con coefficiente angolare perpendicolare ad m:

$$y + 1 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

da cui $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$. □

Esercizio 1.20 Si calcoli la distanza tra la retta r di equazione $2x-y+6 = 0$ e il punto $A = (1; 1)$.

Soluzione. La distanza d tra un punto $P = (x_0; y_0)$ e la retta di equazione $ax + by + c = 0$ si calcola:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pertanto la distanza tra il punto A e la retta r si calcola direttamente dalla formula:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

□

Esercizio 1.21 Si calcoli la distanza tra la retta s di equazione $y = -3x + 1$ e il punto $B = (-1; 2)$.

Soluzione. Si osservi che per applicare la formula del calcola della distanza tra un punto e una retta, l'equazione della retta deve essere in forma implicita. Pertanto per calcolare la distanza tra la retta s e il punto B si deve prima trasformare l'equazione in forma impicita, $3x + y - 1 = 0$ poi si applica la formula:

$$d = \frac{|3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}}.$$

□

1.2 Circonferenza.

Esercizio 1.22 Determinare l'equazione della circonferenza di centro e raggio assegnato:

$$C(0, 0) \qquad r = 3.$$

Soluzione. L'equazione della circonferenza si trova dalla formula $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$ da cui $x^2 + y^2 = 9$. □

Esercizio 1.23 Determinare l'equazione della circonferenza di centro e raggio assegnato:

$$C(2, 1) \qquad r = 2.$$

Soluzione. L'equazione della circonferenza si trova dalla formula

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

da cui $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$. □

Esercizio 1.24 Determinare l'equazione della circonferenza di centro e raggio assegnato:

$$C(-3,2) \qquad r = \sqrt{5}.$$

Soluzione. L'equazione della circonferenza si trova dalla formula

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{5}^2$$

da cui $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0$. □

Esercizio 1.25 Determinare se la seguente equazione rappresenta una circonferenza reale o no. In caso affermativo calcolare raggio e centro:

$$x^2 + y^2 - 3 = 0$$

Soluzione. L'equazione $x^2 + y^2 - 3 = 0$ è una circonferenza e ha raggio $r = \sqrt{3}$ e centro nell'origine degli assi. □

Esercizio 1.26 Determinare se la seguente equazione rappresenta una circonferenza reale o no. In caso affermativo calcolare raggio e centro:

$$x^2 + y^2 + 4 = 0$$

Soluzione. L'equazione non è una circonferenza. □

Esercizio 1.27 Determinare se la seguente equazione rappresenta una circonferenza reale o no. In caso affermativo calcolare raggio e centro:

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0.$$

Soluzione. E' una circonferenza ed ha un raggio pari a 2 e le coordinate del centro $C = (-1, -2)$. □

Esercizio 1.28 Determinare se la seguente equazione rappresenta una circonferenza reale o no. In caso affermativo calcolare raggio e centro:

$$x^2 + y^2 - y = 0.$$

Soluzione. E' una circonferenza ed ha un raggio pari a $\frac{1}{2}$ e le coordinate del centro $C = (0, \frac{1}{2})$. □

Esercizio 1.29 Data la circonferenza reale

$$x^2 + y^2 - 9 = 0.$$

calcolare raggio e centro.

Soluzione. E' una circonferenza che ha centro C$(0, 0)$ e raggio pari a 3. $\square$

Esercizio 1.30 Data la circonferenza reale

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0.$$

calcolare raggio e centro.

Soluzione. E' una circonferenza che ha centro C$(1, 1)$ e raggio pari a $\sqrt{1 + 1 + 7} = 3$. $\square$

Esercizio 1.31 Data la circonferenza reale

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0.$$

calcolare raggio e centro.

Soluzione. E' una circonferenza che ha centro C$(2, -4)$ e raggio pari a $\sqrt{4 + 16 - 16} = 2$. $\square$

Esercizio 1.32 Data la circonferenza reale

$$x^2 + y^2 + 8x + 6y + 9 = 0.$$

calcolare raggio e centro.

Soluzione. E' una circonferenza che ha centro C$(-4, -3)$ e raggio pari a $\sqrt{16 + 9 - 9} = 4$. $\square$

Esercizio 1.33 Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro nell'origine e passa per il punto P(1,3).

Soluzione. L'equazione della circonfenza di centro nell'origine e di raggio rè $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$ da cui si ottiene $x^2 + y^2 = r^2$. Si impone il passaggio per il punto P quindi si ottiene che $r^2 = 1 + 9 = 10$. L'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 = 10$. $\square$

Esercizio 1.34 Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro nel punto $C = (2, -3)$ e passa per l'origine.

Soluzione. L'equazione della circonfenza di centro nell'origine e di raggio rè $(x-2)^2+(y+3)^2 = r^2$ da cui si ottiene $x^2+4-4x+y^2+9+6y = r^2$. Si impone il passaggio per il punto l'origine quindi si ottiene che $r^2 = 4+9 = 13$. L'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$. □

Esercizio 1.35 Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro nel punto $C = (0, 2)$ e passa per il punto $P = (0, 5)$.

Soluzione. L'equazione della circonferenza di centro $C = (0, 2)$ e di raggio rè $(x-0)^2 + (y-2)^2 = r^2$ da cui si ottiene $x^2 + y^2 + 4 - 4y = r^2$. Si impone il passaggio per il punto l'origine quindi si ottiene che $r^2 = 25 + 4 - 20 = 9$. L'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$. □

Esercizio 1.36 Verifica se i seguenti punti $A(1, 1)$, $B(3, 0)$ e $C(-1, -1)$ appartengono o non appartengono alla circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0.$$

Soluzione. Il punto B appartiene alla circonferenza perché $9+0-6+0-3 = 0$;il punto A non appartiene alla circonferenza perché $1+1-2+4-3 = 1$; il punto C non appartiene alla circonferenza perché $1+1+2-4-3 = -3$. □

Esercizio 1.37 Trovare l'equazione della circonferenza di centro $C(1, 2)$ e raggio 2. Verificare se i punti $P(-1, 2)$ e $Q(2, 3)$ appartengono alla circonferenza.

Soluzione. L'equazione della circonferenza è

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

da cui si ottiene

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$$

Il punto P appartiene alla circonferenza infatti si ha

$$(-1)^2 + 2^2 - 2(-1) - 4(2) + 1 = 0.$$

Il punto Q non appartiene alla circonferenza infatti si ha

$$2^2 + 3^2 - 4 - 12 + 1 = -2.$$

$\square$

Esercizio 1.38 Si trovi l'equazione dela circonferenza avente centro $C(-3,4)$ e passante per il punto $P(1,3)$.

Soluzione. Si determina il raggio

$$\sqrt{(1+3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{17}.$$

L'equazione della circonferenza risulta:

$$(x+3)^2+(y-4)^2=17$$

da cui si deduce $x^2+y^2+6x-8y+8=0$. $\square$

Esercizio 1.39 Scrivere l'equazione della circonferenza che ha come estremi del diametro i punti $P(-1,2)$ e $Q(3,4)$.

Soluzione. Calcolando il punto medio tra i punti P e Q si individua il centro della circonferenza

$$C=(\frac{3+1}{2},\frac{4-2}{2})=(\frac{4}{2},\frac{2}{2})=(2,1).$$

La distanza tra C e P o tra C e Q ci da il raggio quindi la distanza al quadrato ci da il raggio al quadrato:

$$r^2=(2+1)^2+(1-2)^2=3^2+(-1)^2=10$$

Quindi la circonferenza si trova calcolando:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=10.$$

$$x^2+y^2+2x-4y+1+4-10=0$$
$$x^2+y^2+2x-4y-5=0$$

$\square$

Esercizio 1.40 Trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(1,3)$, $B(-1,0)$, $C(-4,2)$.

Soluzione. Si scrive l'equazione generica della circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

e si impone il passaggio per il punto A

$$1 + 9 + a + 3b + c = 0,$$

il passaggio per il punto B

$$1 + 0 - a + c = 0,$$

il passaggio per il punto C

$$16 + 4 - 4a + 2b + c = 0.$$

Da cui si ricava la soluzione

$$a = 3 \qquad b = -5 \qquad c = 2.$$

L'equazione della circonferenza passante per il tre punti assegnati ha equazione:

$$x^2 + y^2 + 3x - 5y + 2.$$

$\square$

Esercizio 1.41 Determinare l'intersezione tra la retta di equazione

$$2x + y - 2 = 0$$

e la circonferenza

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0.$$

Soluzione. L'intersezione tra la retta e la circonferenza si calcola isolando per esempio $y = -2x+2$ e la sostituiamo nella equazione della circonferenza:

$$x^2 + (-2x + 2)^2 - 4x + 2(-2x + 2) + 3 = 0.$$

$$x^2 + 4x^2 + 4 - 8x - 4x - 4x + 4 + 3 = 0.$$

$$5x^2 - 16x + 12 = 0.$$

Da questa equazione si trovano le soluzioni:

$$x_1 = \frac{11}{5} \qquad x_2 = 1$$

e si hanno rispettivamente

$$y_1 = -\frac{12}{5} \qquad y_2 = 0.$$

Quindi la retta e la circonferenza si intersecano nei due punti

$$A(1, 0) \qquad B(\frac{11}{5}, -\frac{12}{5}).$$

□

Esercizio 1.42 Si determini l'intersezione tra la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$$

e la retta di equazione

$$x + 2y - 8 = 0.$$

Soluzione. Si procede come nell'esercizio precedente, si ricava $x = -2y + 8$ e si sostituisce nell'equazione della circonferenza:

$$(-2y + 8)^2 + y^2 - 2(-2y + 8) - 2y - 3 = 0$$

$$4y^2 + 64 - 32y + y^2 + 4y - 16 - 2y - 3 = 0$$

$$5y^2 - 30y + 45 = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 = 0$$

da cui si deduce $y_1 = y_2 = 3$ e di conseguenza $x_1 = x_2 = 2$. Pertanto la retta e la circonferenza si incontrano in un punto $P(2, 3)$. □

Esercizio 1.43 Data la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

condurre a essa le tangenti dal punto $P = (0, 1)$.

Soluzione. L'equazione del fascio di rette di centro P si calcola $y - 1 = m(x - 0)$ da cui si deduce che $y = mx + 1$. Tale equazione si sostituisce nell'equazione della circonferenza

$$(mx + 1)^2 + x^2 - 2x + 4(mx + 1) = 0$$

$$m^2x^2 + 1 + 2mx + x^2 - 2x + 4mx + 4 = 0$$

$$(1+m^2)x^2+(6m-2)x+5=0.$$

Si pone $\Delta = 0$ quindi $16m^2-24m-16=0$ da cui si ottengono le due soluzioni $m=-\frac{1}{2}$ e $m=2$. Pertanto le due rette sono

$$y=2x+1 \qquad y=-\frac{1}{2}x+1.$$

□

Esercizio 1.44 Data la circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-2x+4y=0$$

condurre a essa le tangenti dal punto $P=(0,1)$.

Soluzione. Si ripropone lo stesso esercizio precedente e si risolve con un metodo alternativo. Il centro della circonferenza $C(1,-2)$ e $r=\sqrt{5}$. Tra le rette del fascio di centro P scritte in forma implicita $mx-y+1=0$ e si determinano quelle che hanno distanza dal centro C uguale al raggio r, pertanto si impone:

$$\frac{|m+2+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

$$|m+3|=\sqrt{5(m^2+1)},$$

elevando al quadrato si ha:

$$(m+3)^2=5m^2+5$$

da cui si ricava $m=-\frac{1}{2}$ e $m=2$. E si ottengono le stesse due rette

$$y=2x+1 \qquad y=-\frac{1}{2}x+1.$$

□

1.3 Parabola

Esercizio 1.45 Data la parabola di equazione $y=x^2-2x-3$ calcolare il vertice, l'asse di simmetria, il fuoco e la direttrice.

Soluzione. Applicando le formule $(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a})$ si trovano le coordinate del vertice $V(-1,4)$. L'equazione dell'asse di simmetria vale $x=-1$ e il fuoco vale $(-\frac{b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a})=(1,-\frac{15}{4})$ e l'equazione della direttric $y=-\frac{17}{4}$. □

Esercizio 1.46 Data la parabola di equazione $x = 3y^2 - 4y - 4$ calcolare il vertice, l'asse di simmetria, il fuoco e la direttrice.

Soluzione. Il vertice vale $(-\frac{16}{3}, \frac{2}{3})$, il fuoco $(-\frac{21}{4}; \frac{2}{3})$, l'asse di simmetria $y = \frac{2}{3}$ e l'equazione della direttrice vale $x = -\frac{65}{12}$. □

Esercizio 1.47 Determiniamo i punti di intersezione della parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ e la retta $y = x - 4$.

Soluzione. Sostituiamo il valore $y = x - 4$ nell'equazione della parabola e si ottiene l'equazione di secondo grado $x^2 - 2x - 8 = 0$ da cui si ottengono le soluzioni $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$. Pertanto i punti di intersezione sono due $A(-2, -6)$ e $B(4, 0)$. □

Esercizio 1.48 Determinare le equazioni delle rette passanti per il punto $P(1, -5)$ tangente alla parabola di eqauzione $y = x^2 - 2$.

Soluzione. Scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per P data da $y+5 = m(x-1)$ e risolviamo il sistema per imporre l'intersezione tra la retta appena scritta e la parabola da cui si ottiene l'equazione

$$x^2 - mx + m + 3 = 0.$$

Si calcola il $\Delta = 0$ quindi

$$m^2 - 4m - 12 = 0$$

da cui si ottengono due risultati $m_1 = -2$ e $m_2 = 6$ a cui corrispondono le due rette:

$$y = -2x - 3 \qquad y = 6x - 11.$$

□

Esercizio 1.49 Determiniamo l'equazione delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 + 3x$ nel suo punto $P(-1, -2)$.

Soluzione. Usando la formula dello sdoppiamento

$$\frac{y + y_0}{2} = ax_0x + b\frac{x + x_0}{2} + c$$

si ha

$$\frac{y - 2}{2} = -x + 3\frac{x - 1}{2} \quad \rightarrow \quad y = x - 1.$$

□

Esercizio 1.50 Si determini l'equazione della parabola passante per i punti $A(-1,5)$ e $B(4,0)$ e tangente alla retta di equazione $y = 2x - 9$.

Soluzione. Imponiamo alla parabola di equazione $y = ax^2+bx+c$ il passaggio per i punti A e B:

$$5 = a - b + c \qquad 0 = 16a + 4b + c.$$

Ora imponiamo che la retta $y = 2x - 9$ sia tangente alla parabola $y = ax^2 + bx + c$ da cui si ottiene l'equazione

$$ax^2 + (b-2)x + c + 9 = 0$$

pertanto $\Delta = (b-2)^2 - 4a(c+9) = 0$. Mettendo insieme le tra condizioni:

$$5 = a - b + c \qquad 0 = 16a + 4b + c \qquad (b-2)^2 - 4a(c+9) = 0$$

si ottengono i seguenti valori:

$$a = 1 \qquad b = -4$$

□

Esercizio 1.51 Trovare l'equazione della parabola di fuoco $\mathrm{F}(0, \frac{1}{2})$ e direttrice di equazione $y = -\frac{1}{2}$.

Soluzione. Applicando la definizione di parabola si ha

$$\sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2} = |y + \frac{1}{2}|$$

da cui elevando a quadrato e sviluppando i calcoli, si ricava

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

□

Esercizio 1.52 Trova l'equazione della parabola di fuoco $\mathrm{F}(3,0)$ e direttrice $x = -3$.

Soluzione. Applicando la definizione si ha

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = |x+3|$$

da cui elevando al quadrato e sviluppando i calcoli si ricava

$$x = \frac{1}{12}y^2.$$

□

Esercizio 1.53 Determinare l'equazione della parabola con fuoco F$(-1,-4)$ e direttrice $y=-5$.

Soluzione. Applicando la definizione si ha che

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2} = |y+5|.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri si ha

$$(x+1)^2+(y+4)^2 = (y+5)^2$$

da cui si deduce

$$x^2+1+2x+y^2+16+8y = y^2+25+10y.$$

Pertanto si ottiene

$$x^2+2x-2y-8=0$$

quindi $y = \frac{1}{2}x^2+x-4$.

□

Esercizio 1.54 Trova l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y passante per i punti A$(2,4)$, B$(-1,1)$ e C$(3,3)$.

Soluzione. Imponendo l'appartenenza dei singoli punti alla generica parabola $y=ax^2+bx+c$ si ottengono le tre equazioni:

$$4 = 4a+2b+c$$

$$1 = a-b+c$$

$$3 = 9a+3b+c$$

che ammette soluzione $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$ e $c=3$. Quindi l'equazione della parabola ottenuta

$$y = -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3.$$

□

Esercizio 1.55 Determinare la parabola di equazione $y = ax^2+bx+c$ avente vertice in V$(2, -1)$ e passante per il punto P$(3, 4)$.

Soluzione. Si impone che la parabola abbia vertive in V quindi

$$-\frac{b}{2a} = 2,$$

poi si imposta il passaggio della parabola per il punto P

$$4a + 2b + c = -1$$

e per lo stesso vertice V,

$$9a + 3b + c = 4.$$

Quindi risolvendo le tre equazioni si ottengono i valori $a = 5, b = -20, c = 19$ da cui si ottiene la parabola

$$y = 5x^2 - 2x + 19.$$

□

Esercizio 1.56 Scrivere l'equazione della parabola di fuoco F$(0, 2)$ e direttrice $y = -2$.

Soluzione. L'equazione si trova come negli esercizi precedenti applicando la definizione. L'equazione risulta $y = \frac{1}{8}x^2$. □

Esercizio 1.57 Scrivere l'equazione della parabola di fuoco F$(0, 6)$ e direttrice $y = -2$.

Soluzione. L'equazione si trova come negli esercizi precedenti applicando la definizione. L'equazione risulta $y = \frac{1}{16}x^2 + 2$. □

Esercizio 1.58 Scrivere l'equazione della parabola con l'asse parallelo all'asse delle y passante per i punti A$(1, 2)$, B$(0, 3)$ e C$(-2, 1)$. Trovare poi le coordinate del vertice.

Soluzione. Imponendo per l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ il passaggio per i tre punti si hanno le seguenti equazioni:

$$a + b + c = 2$$

$$c = 3$$

$$4a - 2b + c = 1,$$

da cui si deduce che $a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = 3$. L'equazione della parabola diventa

$$y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 3,$$

e il vertice $\mathrm{V}(-\frac{1}{4}, \frac{73}{24})$. □

Esercizio 1.59 Determina le coordinate del vertice e delle intersezioni con gli assi cartesiani della seguente parabola:

$$y = 2x^2 - 2x - 4.$$

Soluzione. Il vertice dalla definizione si ottiene

$$V(\frac{1}{2}; -\frac{9}{2}).$$

Per i punti di intersezione si ottengono rispettivamente imponendo $x = 0$ da cui si ha $y = -4$ quindi l'intersezione con l'asse y sia $\mathrm{A}(0; -4)$. Per i punti di intersezione con l'asse delle x si impone $y = 0$ e si risolve $2x^2 - 2x - 4 = 0$ da cui si ottengono i punti $x = -1$ e $x = 2$. Quindi i punti di intersezione con l'asse y sono $\mathrm{B}(-1; 0)$ e $\mathrm{C}(2; 0)$. □

Esercizio 1.60 Scrivere l'equazione della parabola con l'asse parallelo all'asse delle y avente il vertice nel punto $\mathrm{V}(-1; -1)$ e passante per il punto $\mathrm{P}(1; -5)$.

Soluzione. Data l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ dalla definizione del vertice si ha la prima equazione

$$-\frac{b}{2a} = -1$$

da cui si deduce $b = 2a$. Poi si impone rispettivamente il passaggio per il vertice V e il punto P,

$$-1 = a - b + c \qquad -5 = a + b + c.$$

Sostituisco $b = 2a$ e si ottiene

$$-1 = a - 2a + c \qquad -5 = a + 2a + c.$$

$$c = -1 + a \qquad c = -5 - 3a.$$

Uguagliando le due equazioni si ottiene $-1 + a = -5 - 3a$ quindi $a = -1$, $b = -2$, $c = -2$. L'equazione della parabola diventa $y = -x^2 - 2x - 2$. □

1.4 Ellisse

Esercizio 1.61 Scrivere l'equazione dell'ellisse in forma canonica assegnato $a = 5$ e $c = 3$ con fuochi sull'asse delle ascisse

Soluzione. Dalla definizione si ottiene che $b^2 = 25 - 9 = 16$ pertanto l'equazione dell'ellisse risulta

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

□

Esercizio 1.62 Scrivere l'equazione dell'ellisse in forma canonica assegnato $a = \sqrt{6}$ e $b = 1$ con fuochi sull'asse delle ascisse

Soluzione. L'equazione dell'ellisse risulta

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

□

Esercizio 1.63 Scrivere l'equazione dell'ellisse in forma canonica assegnato $b = 2$ e $c = 4$ con fuochi sull'asse delle ascisse

Soluzione. Dalla definizione si ottiene che $a^2 = 16 + 4 = 20$ pertanto l'equazione dell'ellisse risulta

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

□

Esercizio 1.64 Scrivere l'equazione dell'ellisse in forma canonica assegnato $a = 2$ e $e = \frac{1}{2}$ con fuochi sull'asse delle ascisse

Soluzione. Dalla definizione di $e = \frac{c}{a}$ si ottiene $\frac{1}{2} = \frac{c}{2}$ da cui si deduce che $c = 1$ e $b^2 = 4 - 1 = 3$. Pertanto l'equazione dell'ellisse risulta

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

□

Esercizio 1.65 Scrivere l'equazione dell'ellisse conoscendo il fuoco F(3; 0) e il vertice A(4; 0).

Soluzione. Dall'equazione del vertice $a = 4$ e dall'equazione del fuoco si ha che $b^2 = 16 - 9 = 7$ da cui l'equazione

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

□

Esercizio 1.66 Scrivere l'equazione dell'ellisse conoscendo i vertici A(6; 0) e B(0; 5).

Soluzione. Dalle coordinate dei vertici si ha che $a = 4$ e $b = 5$ da cui l'equazione

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

□

Esercizio 1.67 Data l'equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

trova i vertici e i fuochi.

Soluzione. Si ha che $a^2 = 12$ e $b^2 = 4$ quindi i vertici $A_1(2\sqrt{3}, 0)$, $A_2(-2\sqrt{3}, 0)$, $B_1(0, 2)$, $B_2(0, -2)$. Mentre i fuochi si calcolano da $c^2 = 12 - 4 = 8$ pertanto $F_1(2\sqrt{2}, 0)$ e $F_2(-2\sqrt{2}, 0)$. □

Esercizio 1.68 Data l'equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1.$$

trova i vertici e i fuochi.

Soluzione. Si ha che $a^2 = 8$ e $b^2 = 6$ quindi i vertici $A_1(2\sqrt{2}, 0)$, $A_2(-2\sqrt{2}, 0)$, $B_1(0, \sqrt{6})$, $B_2(0, -\sqrt{6})$. Mentre i fuochi si calcolano da $c^2 = 8 - 6 = 2$ pertanto $F_1(\sqrt{2}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{2}, 0)$. □

1 Problemi di geometria.

Esercizio 1.1 Stabilisci quali delle seguenti coppie di grandezze sono omogenee, motivando la tua decisione.
a) La superficie di un pavimento e la superficie di una stanza.
b) Il perimetro della tua stanza e il perimetro del giardino della tua casa.
c) La superficie della tua camera e il perimentro della tua camera.

Soluzione. Si, si, no. □

Esercizio 1.2 Stabilisci quali delle seguenti coppie di grandezze sono omogenee, motivando la tua decisione.
a) La lunghezza e la larghezza di una stanza.
b) Il volume di una botte e il suo peso.
c) La superficie di un lago ghiacciato e lo spessore della lastra di ghiaccio.

Soluzione. si, no, no. □

Esercizio 1.3 Esegui le seguenti operazioni, esprimendo il risultato nell'unità di misura di volta in volta indicata.
$0,46$ m^2+24 dm^2 = ... cm^2
$0,04$ hm^2+$0,4$ dam^2 = ... m^2
120 m^2+$0,2$ hm^2 = ... dam^2.

Soluzione. 7000 cm^2; 440 m^2; $21,2$ dam^2. □

Esercizio 1.4 Esegui le seguenti operazioni, esprimendo il risultato nell'unità di misura di volta in volta indicata.
$0,006$ m^3+20 dm^3 = ... cm^3
$0,001$ hm^3+$0,05$ dam^3 = ... m^3
1000 m^3+$0,001$ hm^3 = ... dam^3.

Soluzione. 26000 cm^3, 1050 m^3,2 dam^3. □

Esercizio 1.5 Esegui le seguenti operazioni, esprimendo il risultato nell'unità di misura di volta in volta indicata.
$0,3$ hl+4 dal = ... l
$0,4$ dl+$0,09$ l = ... cl
20 cl+2 dl = ... ml.

Soluzione. 70 l, 13 cl, 400 ml. □

Esercizio 1.6 Esegui le seguenti operazioni, esprimendo il risultato nell'unità di misura di volta in volta indicata.
3 kg+ $0,2$ hg $= \ldots$ dag
$0,02$ t+ 30 hg $= \ldots$ kg
320 g+ 240 dag $= \ldots$ dg
27dg $+ 0,25$mg $= \ldots$ cg.

Soluzione. 302 dag, 23 kg, $27,2$ dg, $5,2$ cg . □

Esercizio 1.7 Rispondi vero falso:
a) il segmento che congiunge due punti é pari alla distanza tra di essi;
b) non é possibile disegnare per tre punti non allineati due segmenti consecutivi;
c) si puó disegnare per tre punti allineati due segmenti adiacenti.

Soluzione. V, F, V. □

Esercizio 1.8 Rispondi vero falso:
a)due segmenti adiacenti hanno un punto in comune e giacciono sulla stessa retta;
b) si puó disegnare per tre punti non allineati due segmenti adiacenti;
c) su di una retta segnati due o piú punti distinti si ottengono segmenti adiacenti.

Soluzione. V, F, V. □

Esercizio 1.9 Rispondi vero falso:
a) due segmenti adiacenti non sono consecutivi;
b) ogni segmento della spezzata si dice lato e ogni estremo di un lato si dice vertice;
c) il vertice di una spezzata non coincide con lestremo di due segmenti che compongono tale spezzata.

Soluzione. F, V, F. □

Esercizio 1.10 Rispondi vero falso:
a) due segmenti consecutivi giacciono sulla stessa retta;

b) una linea spezzata é formata da due o piú tre segmenti non consecutivi;
c) due segmenti consecutivi hanno un punto in comune.

Soluzione. F, F, V. □

Esercizio 1.11 Rispondi vero falso:
a) data una retta r e fissato un punto su di essa, si ottengono due segmenti;
b) un segmento ha due estremi detti estremi del segmento;
c) la distanza tra due punti é il percorso piú breve che unisce tali punti.

Soluzione. F, V, V. □

Esercizio 1.12 Dato un segmento AB di lunghezza 4 cm e un segmento CD di lunghezza il doppio di AB. Quanti cm vale il segmento CD? Quanto vale la lunghezza del segmento AB+CD?

Soluzione. 8 cm, 12 cm. □

Esercizio 1.13 Dato un segmento AB di lunghezza 9 cm e un segmento CD di lunghezza un terzo di AB. Quanti cm vale il segmento CD? Quanto vale la lunghezza del segmento AB+CD?

Soluzione. 3 cm, 12 cm. □

Esercizio 1.14 Dato un segmento AB di 5 cm costruisci i segmenti CD e EF seguendo le indicazioni: CD=3 AB e EF=2CD- AB. Quanto misurano rispettivamente i segmenti CD e EF?

Soluzione. 15 cm, 25 cm. □

Esercizio 1.15 Determina la misura delle seguenti coppie di segmenti AB e CD con AB¿CD sapendo che AB+CD= 15 cm e AB-CD=5 cm.

Soluzione. AB= 10 cm, CD= 5cm. □

Esercizio 1.16 Determina la misura delle seguenti coppie di segmenti AB e CD con AB¿CD sapendo che AB+CD=45 cm e AB-CD=23 cm.

Soluzione. AB= 34 cm, CD=11 cm. □

Esercizio 1.17 Determina la misura delle seguenti coppie di segmenti AB e CD con AB¿CD sapendo che AB+CD=20 cm e AB-CD=3,4 cm.

Soluzione. AB=11,7 cm , CD= 8,3 cm. □

Esercizio 1.18 Due segmenti misurano rispettivamente 19,8 cm e 9,7 cm. Calcola la misura del segmento somma e del segmento differenza.

Soluzione. 29,5 cm, 10,1 cm. □

Esercizio 1.19 La differenza tra due segmenti misura 106 cm e il minore misura 48 cm. Calcola la misura del segmento maggiore.

Soluzione. 58 cm. □

Esercizio 1.20 Sapendo che AB-CD=240 cm e AB=5CD, calcola la misura dei segmenti AB e CD.

Soluzione. 60 cm, 300 cm. □

Esercizio 1.21 Disegna un segmento AB lungo 2,5 cm e determina la misura del suo doppio, del suo triplo e del suo quadruplo. Costruisci poi il segmento CD=6AB e calcolane la misura.

Soluzione. 5 cm, 7,5 cm, 10 cm, 15 cm. □

Esercizio 1.22 Tre segmenti sono tali che il primo misura 7 cm, il secondo misura il doppio del primo e il terzo il doppio del secondo. Calcola la misura dei tre segmenti e la somma dei tre segmenti.

Soluzione. 7 cm, 14 cm, 28 cm, 49 cm. □

Esercizio 1.23 Calcola la misura di quattro segmenti sapendo che la loro somma vale 93 cm, il secondo e il terzo sono rispettivamente il doppio e il triplo del primo, mentre il terzo misura $\frac{1}{5}$ del primo.

Soluzione. 15 cm, 30 cm, 45 cm, 3 cm. □

Esercizio 1.24 Un segmento AB risulta formato da quattro segmenti adiacenti: il secondo misura la metá del primo e il quarto misura la metá del terzo. Inoltre il terzo misura il doppio del primo. Sapendo che il primo segmento misura 14 cm, calcola la misura di AB.

Soluzione. 63 cm. □

Esercizio 1.25 Calcola il perimetro di un poligono di quattro lati, sapendo che le loro misure sono 4,14 cm, 7,16 cm, 14,3 cm e 15,4 cm.

Soluzione. 41 cm. □

Esercizio 1.26 Un quadrilatero ha due lati congruenti e ciascuno di essi misura 9,8 cm. Sapendo che le misure degli altri lati sono 4,4 cm e 7,6 cm, calcola il perimetro del quadrilatero.

Soluzione. 31,6 cm. □

Esercizio 1.27 Un poligono ABCDE ha il perimetro di 125 cm, AB=25 cm, BC=24 cm, CD=29 cm, DE=17 cm. Quanto misura il quinto lato AE?

Soluzione. 30 cm. □

Esercizio 1.28 Un esagono ha i lati a due a due congruenti. Il primo lato misura 44 cm, il secondo la metá del primo e il terzo $\frac{3}{4}$ del primo. Calcola la misura dei lati e del perimetro dell'esagono.

Soluzione. 44 cm, 22 cm, 33 cm, 44 cm, 22 cm, 33 cm, 198 cm. □

Esercizio 1.29 La differenza tra due lati di un quadrilatero misura 4,5 cm. Sapendo che il perimetro misura 105,5 cm e che gli altri due lati misurano 32 cm e 42 cm, calcola la misura dei lati incogniti.

Soluzione. 13,5 cm, 18 cm. □

Esercizio 1.30 Il perimetro di un quadrilatero misura 98 cm e due lati misurano 20 cm e 23 cm. Sapendo che degli altri due uno supera l'altro di 9 cm, calcola le loro misure.

Soluzione. 23 cm, 32 cm. □

Esercizio 1.31 La differenza tra due lati di un quadrilatero misura 5,5 cm. Sapendo che il perimetro vale 125,5 e che gli altri due lati misurano 44 cm e 26 cm, calcola le misure dei lati incogniti.

Soluzione. 25 cm, 30,5 cm. □

Esercizio 1.32 Applicando la formula d=n(n-3):2 calcola il numero delle diagonali dei seguenti poligoni:
a. con quattordici lati
b. con nove lati
c. con sedici lati

Soluzione. 77, 27, 104. □

Esercizio 1.33 In un quadrilatero gli angoli sono a due a due congruenti. Il primo misura 110 gradi, quanto misurano gli altri due?

Soluzione. 70 gradi □

Esercizio 1.34 In un pentagono gli angoli misurano rispettivamente 46, 67, 123 gradi. Se i rimanenti due angoli sono congruenti, quanto misurano?

Soluzione. 152 gradi. □

Esercizio 1.35 In un pentagono quattro lati misurano rispettivamente 127, 115, 98 e 100 gradi. Quanto misura il quinto angolo?

Soluzione. 100 gradi. □

Esercizio 1.36 Gli angoli interni di un triangolo misurano rispettivamente 40, 75, 65 gradi. Determina l'ampiezza dell'angolo esterno adiacente a ciascuno di essi.

Soluzione. 140, 105, 115 gradi. □

Esercizio 1.37 Un angolo di un triangolo misura 68 gradi. Sapendo che il secondo angolo é $\frac{11}{17}$ di quello dato, calcola la misura del terzo angolo.

Soluzione. 68 gradi. □

Esercizio 1.38 Due angoli di un poligono di sei lati sono tali che uno vale quattro volte l'altro. Gli altri tre misurano 120, 140 e 160 gradi. Determina la misura dei due angoli considerati.

Soluzione. 150 gradi □

Esercizio 1.39 Quattro degli angoli interni di un esagono misurano 123, 201, 76, 24 gradi. Quanto misurano gli due lati se uno supera l'altro di 76 gradi?

Soluzione. 200,276 gradi. □

Esercizio 1.40 In un triangolo due angoli misurano rispettivamente 90 e 60 gradi, quanto misura il terzo angolo?

Soluzione. 30 gradi. □

Esercizio 1.41 In un triangolo ABC, l'angolo in C misura 127 gradi. Quanto misura langolo interno a esso adiacente?

Soluzione. 53 gradi. □

Esercizio 1.42 Calcola la misura del terzo lato di un triangolo sapendo che due lati misurano rispettivamente 15 cm e 30 cm e il perimetro 80 cm.

Soluzione. 35 cm. □

Esercizio 1.43 In un triangolo due lati misura rispettivamente 4,4 cm e 5,4 cm. Calcola la misura del terzo lato, sapendo che il perimetro vale 17,2 cm.

Soluzione. 7,4 cm. □

Esercizio 1.44 In un triangolo il primo lato misura 21 cm, il secondo supera il terzo di 10 cm e il perimetro vale 45 cm. Calcola le misure incognite dei due lati.

Soluzione. 7 cm e 17 cm □

Esercizio 1.45 In un triangolo due lati misurano 57 cm e 31 cm e il terzo lato vale il doppio della differenza dei primi due. Calcola il perimetro del triangolo.

Soluzione. 52 cm e 104 cm. □

Esercizio 1.46 Un lato di un triangolo misura 45 cm e gli altri due sono rispettivamente $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$ del lato noto. Calcola la misura di ciascun lato incognito e il perimetro.

Soluzione. 27 cm, 30 cm, 102 cm. □

Esercizio 1.47 La somma e la differenza di due lati di un triangolo misurano rispettivamente 40 cm e 22 cm. Sappiamo che il terzo lato supera di 9 cm il minore degli altri due. Calcola le misure dei tre lati e il perimetro del triangolo.

Soluzione. 31 cm, 9cm, 18 cm,58cm □

Esercizio 1.48 Un triangolo isoscele ha la base di 66 cm e il lato obliquo di 44 cm. Calcola il perimetro del triangolo.

Soluzione. 154 cm □

Esercizio 1.49 In un triangolo isoscele la base misura 50 cm e il lato misura doppio della base. Calcola il perimetro.

Soluzione. 250 cm □

Esercizio 1.50 Il lato di un triangolo equilatero vale 12 cm. Determina il perimetro del triangolo.

Soluzione. 36 cm. □

Esercizio 1.51 Un triangolo rettangolo isoscele ha lipotenusa e un cateto con le seguenti misure: 19 cm e 9 cm. Calcola il suo perimetro.

Soluzione. 37 cm. □

Esercizio 1.52 I lati di un triangolo misurano rispettivamente 13,4 cm, 14,5 cm, 15,6 cm. Calcola il perimetro.

Soluzione. 43,5 cm. □

Esercizio 1.53 Il perimetro di un triangolo isoscele vale 145 cm e la base misura il triplo del lato. Calcola la misura di ciascun lato e della base.

Soluzione. 29cm, 87cm. □

Esercizio 1.54 La base di un triangolo isoscele misura 12,5 m e il lato obliquo misura uguale ai suoi $\frac{3}{5}$. Calcola il perimetro del triangolo.

Soluzione. 27,5 cm. □

Esercizio 1.55 In un triangolo isoscele la base congruente alla quinta parte di ciascuno dei lati. Calcola la misura della base e del lato, sapendo che il perimetro misura 121 cm.

Soluzione. 11 cm, 55 cm. □

Esercizio 1.56 Il perimetro di un triangolo isoscele vale 190 cm e uno dei lati obliqui misura $\frac{7}{5}$ della base. Calcola le misure della base e del lato del triangolo.

Soluzione. 50cm, 70cm. □

Esercizio 1.57 Un triangolo isoscele isoperimetrico a un triangolo equilatero di lato 15cm. Uno dei lati obliqui del triangolo isoscele misura 13 cm. Quanto vale la base del triangolo isoscele?

Soluzione. 19 cm. □

Esercizio 1.58 La somma e la differenza tra i cateti di un triangolo rettangolo misurano 450 mm e 56 mm. Calcola la misura di ciascuno dei due cateti.

Soluzione. 253 mm, 197mm. □

Esercizio 1.59 Un triangolo rettangolo ha i cateti di 185mm e 244 mm. Sapendo che l'ipotenusa supera il cateto minore di 120 mm, calcola il perimetro del triangolo.

Soluzione. 734 mm. □

Esercizio 1.60 Due triangoli isosceli hanno lo stesso perimetro di 100 cm. La base del primo misura 20 cm e il lato del secondo triangolo vale $\frac{3}{4}$ del lato del primo. Calcola le misure del lato e della base del secondo triangolo.

Soluzione. 30 cm, 40 cm. □

Esercizio 1.61 Una stola si realizza a forma di un triangolo equilatero di lato 120 cm. Quanto ha speso la sarta ad orlarla con un merletto che costa 14 euro al metro?

Soluzione. 50,4 euro. □

Esercizio 1.62 Due triangoli isosceli hanno lo stesso perimetro di 350 cm. Il lato obliquo del primo misura 120 cm e il lato del secondo triangolo vale $\frac{2}{5}$ della base del primo. Calcola le misure del lato e della base del secondo triangolo.

Soluzione. 44 cm, 262 cm. □

Esercizio 1.63 Due triangoli isoscele sono isoperimetrici. La base del primo supera la base del secondo di 10 cm e il lato obliquo del triangolo isoscele misura $\frac{3}{4}$ della sua base. Calcola il lato obliquo del secondo triangolo, sapendo che la base del secondo vale 6 cm.

Soluzione. 17 cm. □

Esercizio 1.64 In un triangolo un angolo misura 35 gradi e il secondo misura il doppio di tale angolo. Calcola la misura del terzo angolo.

Soluzione. 75 gradi. □

Esercizio 1.65 In un triangolo isoscele l'angolo al vertice misura 106 gradi. Quanto misurano gli angoli alla base?

Soluzione. 37 gradi. □

Esercizio 1.66 In un triangolo un angolo misura 45 gradi e un altro vale il doppio di tale angolo. Quanto misura il terzo angolo? Come si classifica il triangolo dato rispetto agli angoli?

Soluzione. 90 e 45 gradi, triangolo rettangolo isoscele. □

Esercizio 1.67 Un angolo di un triangolo misura 48 gradi e gli altri due sono uno il triplo dell'altro. Calcola le misure di questi due angoli.

Soluzione. 33 e 99 gradi. □

Esercizio 1.68 In un triangolo un angolo vale $\frac{1}{5}$ dell'altro e a loro somma misura 108 gradi. Calcola la misura dei tre angoli del triangolo. Come si classifica il triangolo dato rispetto agli angoli?

Soluzione. 90, 18 e 72 gradi, triangolo rettangolo. □

Esercizio 1.69 Calcola l'ampiezza di ciascun dei due angoli acuti di un triangolo rettangolo, sapendo che uno di essi supera l'altro di 34 gradi.

Soluzione. 28 e 62 gradi. □

Esercizio 1.70 In un triangolo isoscele l'angolo esterno adiacente a uno degli angoli di base misura 124 gradi. Calcola la misura dell'angolo al vertice.

Soluzione. 68 gradi. □

Esercizio 1.71 Quanto misura l'angolo alla base di un triangolo isoscele se vale $\frac{13}{17}$ dell'angolo esterno a esso adiacente?

Soluzione. 78 gradi □

Esercizio 1.72 L'ampiezza dellangolo al vertice di un triangolo isoscele misura 44 gradi. Determina le ampiezze degli angoli formati dalla bisettrice di un angolo alla base con il lato del triangolo?

Soluzione. 34 gradi. □

Esercizio 1.73 In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, traccia dal vertice A la bisettrice dellangolo e determina le ampiezze degli angoli acuti del triangolo, sapendo che tale bisettrice forma con l'ipotenusa un angolo di 95 gradi.

Soluzione. 40 e 50 gradi. □

Esercizio 1.74 Un quadrilatero ha tre lati congruenti la cui somma misura 99 cm. Il quarto lato vale un terzo di uno qualsiasi degli altri tre. Calcola il perimetro del quadrilatero.

Soluzione. 110 cm. □

Esercizio 1.75 Un lato di un quadrilatero misura 18 cm e gli altri lati misurano $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{2}$ di quello dato. Calcola le misure di ogni lato e il perimetro del quadrilatero.

Soluzione. 15 cm, 4 cm, 9 cm, 46 cm. □

Esercizio 1.76 In un quadrilatero ABCD il lato AB misura 8,9 cm e il lato BC misura 9,8 cm. Sapendo che il terzo lato supera AB di 4,5 cm e il quarto lato supera BC di 3,4cm, calcola il perimetro del quadrilatero.

Soluzione. 45,3 cm. □

Esercizio 1.77 In un quadrilatero un lato misura 10,1 cm e ciascuno degli altri due supera il primo rispettivamente di 7,4 cm, 4,5 cm e 3,9 cm. Calcola il perimetro del quadrilatero.

Soluzione. 56,2 cm. □

Esercizio 1.78 In un quadrilatero la somma e la differenza di due angoli misurano rispettivamente 120 e 20 gradi e gli altri due angoli sono congruenti. Calcola la misura degli angoli del quadrilatero.

Soluzione. 120, 120, 70, 50 gradi. □

Esercizio 1.79 Calcola l'ampiezza di ciascun angolo di un quadrilatero ABCD, sapendo che due di essi sono congruenti e che le misure degli altri due sono 86 gradi e $\frac{4}{5}$ di 65 gradi.

Soluzione. 86, 52, 111,111 gradi □

Esercizio 1.80 In un quadrilatero la somma e la differenza di due lati misurano rispettivamente 42 cm e 2cm. Il terzo lato misura 23 cm e il quarto supera di 4 cm il maggiore di essi. Calcola la misura del quarto lato.

Soluzione. 27 cm. □

Esercizio 1.81 La somma di tre lati congruenti di un quadrilatero misura 63,6 cm e il quarto lato supera di 3,6 cm uno di questi tre lati. Calcola il perimetro del quadrilatero.

Soluzione. 88,4 cm. □

Esercizio 1.82 Calcola il perimetro di un quadrilatero sapendo che due suoi lati misurano 35m e 55m, che il terzo vale $\frac{7}{9}$ della somma dei primi due e che il quarto lato vale $\frac{4}{5}$ della loro differenza.

Soluzione. 176 m. □

Esercizio 1.83 La somma di tre lati congruenti di un quadrilatero misura 66,48cm e il quarto lato supera di 18,12 cm uno di questi tre lati. Calcola il perimetro del quadrilatero.

Soluzione. 106,76cm. □

Irene Venturi

Department of Economics and Management
University of Pisa
Via Cosimo Ridolfi 10, 56124 Pisa, ITALY
e-mail: irene.venturi@ec.unipi.it

1 Problemi ed esercizi con i numeri reali.

Esercizio 1.1 Delle confezioni di semi di girasole di marche diverse contenenti la stessa quantità di prodotto, hanno i seguenti prezzi in euro:

$$5,73; \quad 6,1; \quad 5,78; \quad 5,65; \quad 5,65; \quad 5,09.$$

Stabilire quale è il prezzo più alto e più basso delle diverse confezioni.

Soluzione. Per stabilire quale delle confezioni di semi di girasoli ha il prezzo più alto e più basso a si devono ordinare i prezzi in ordine crescente. Pertanto si ha:

$$5,09 \quad 5,6 \quad 5,65 \quad 5,73 \quad 5,78 \quad 6,1$$

□

Esercizio 1.2 Il perimetro di un orto denominato A è pari a $54,72$ metri, quello di un secondo orto denominato B è pari a $54,7$ metri. Tra l'orto A e l'orto B quale ha il perimetro minore? Se al metro le spese per costruire un recinto sono pari a $12,7$euro, quanto costa recintare entrambi i due orti? Se ho a disposizione 2000 euro sono sufficienti per l'acquisto di tutto il recinto? Motivare la risposta.

Soluzione. Essendo $54,7 < 54,72$ l'orto B ha il perimetro minore dell'orto A. Per calcolare l'ammontare della spesa nel recintare entrambi gli orti, si deve calcolare il perimetro totale e moltiplicarlo per il prezzo al metro, pertanto si ha:

$$(54,72 + 54,7) \cdot 12,7 = 109,42 \cdot 12,7 = 1.389,634.$$

Avendo a disposizione 2000 euro ed essendo $2000 > 1.389,634$ è possibile acquistare tutto il recinto. □

Esercizio 1.3 I risultati di laboratorio della misura di una foglia di alloro differiscono di millimetri a causa di un malfunzionamento dello strumento di misura. Le misure espresse in centimetri sono le seguenti:

$$10,012 \quad 9,99 \quad 10,023 \quad 10,01 \quad 10,03.$$

Ordinale in ordine decrescente.

Soluzione. In ordine decrescente le misure sono:

$$10,03 \quad 10,023 \quad 10,012 \quad 10,01 \quad 9,99.$$

$\square$

Esercizio 1.4 In una vetrina di un fioraio il commesso dispone al mattino sul primo scaffale 106 piante grasse, sul secondo scaffale 99 piante di girasole. Nel pomeriggio dispone altre 75 piante grasse sul primo scaffale e 123 girasoli sul secondo scaffale. Dove ha disposto piú piante? Quanti e quale piante deve aggiungere e su quale scaffale affinché il numero di piante sia uguale?

Soluzione. Il numero di piante grasse totale si ottiene sommando $106+75 = 181$, quelle di girasole $99 + 123 = 222$; pertanto sono maggiori le piante di girasole disposte sul secondo scaffale e per averne in numero uguale si calcola la differenza $222-181 = 41$. Il commesso deve aggiungere 41 piante grasse. $\square$

Esercizio 1.5 Un primo studente ha sostenuto 13 esami ed un secondo studente 7 esami. Quanti esami ha sostenuto in piú il primo studente rispetto al secondo? Se un terzo studente ha sostenuto tanti esami pari ai quattro quinti della somma degli esami sostenuti dal primo e dal secondo studente, chi dei tre ne ha sostenuti in numero maggiore?

Soluzione. Il primo studente ha sostenuto $13 - 7 = 6$ esami in piú rispetto al secondo studente. Per calcolare il numero degli esami sostenuti dal terzo studente si calcola:

$$\frac{4}{5}(13 + 7) = \frac{4}{5} \cdot 20 = 4 \cdot 4 = 16.$$

Il terzo studente è quello che ha sostenuto un numero maggiore di esami. $\square$

Esercizio 1.6 La temperatura di un frigo dove sono conservati dei fiori pregiati è costante e misura -40 gradi centigradi. Ma per un guasto tecnico la temperatura del frigo arriva a misurare -23 gradi centrigradi. Quale è stata la variazione della temperatura?

Soluzione. Per calcolare la variazione si esegue la differenza tra le temperature tenendo conto che queste sono misure negative. Pertanto si ha la seguente espressione:

$$|-40-(-23)| = |-17| = 17.$$

La variazione è pari a 17 gradi. $\square$

Esercizio 1.7 Il proprietario di una agraria si scrive giornalmente quanto guadagna in sei giorni di lavoro. Alla fine della settimana dice al commesso: "nei primi tre giorni della settimana incassiamo il doppio degli altri due giorni ed abbiamo incassato 1223 euro. Tolte le spese di 235 euro ho calcolato che incassiamo poco piú di 100 euro in media tutti i giorni". Le conclusioni del proprietario sono corrette? Motiva la risposta.

Soluzione. Le conclusioni del proprietario non sono corrette. Infatti dall'incasso si tolgono le spese e si ottiene che il guadagno dell'agraria è pari a $1223-235 = 988$ euro. Nei primi tre giorni della settimana l'agraria incassa il doppio degli altri due giorni, pertanto detto x l'incasso di un giorno si avr l'equazione seguente:

$$2x+2x+2x+x+x = 988 \quad 8x = 288 \qquad x = 123,5$$

che risulta essere pari all'incasso giornaliero solo degli ultimi due giorni. Mentre nei primi tre giorni si ha $2x = 2 \cdot 123,5$ quindi 247 euro. $\square$

Esercizio 1.8 Un commesso dispone in vetrina 4 file di 15 oggetti mentre il suo collega dispone in una seconda vetrina 6 file di 10 oggetti. Il numero di oggetti disposti nella prima vetrina è maggiore, minore o uguale del numero di oggetti esposti nella seconda?

Soluzione. Il numero è uguale perché il primo commesso dispone $4 \cdot 15 = 60$ oggetti pari al secondo che ne dispone $6 \cdot 10 = 60$. $\square$

Esercizio 1.9 Una signora acquista 6 vasetti di semi di girasoli a $4,45$ euro, 7 vasetti di semi di lino a $6,52$. Nel borsellino ha due banconote da 20 euro, una da 10 euro, due da 5 euro e 7 monete da $0,50$ euro. Le sono sufficienti i soldi per acquistare tutti i vasetti? Se non le sono sufficienti, quanti e quali vasetti non deve comprare per non spendere piú denaro a sua disposizione?

Soluzione. La signora spende:

$$4,45 \cdot 6 + 6,52 \cdot 7 = 72,34.$$

Nel borsellino ha:

$$2 \cdot 20 + 10 + 2 \cdot 5 + 7 \cdot 0,50 = 63,50.$$

Non ha abbastanza soldi perché $63,50 < 72,34$. La differenza è $8,84$ quindi si deve ragionare su quale o quali vasetti deve riposare. Non è sufficiente posare un solo vasetto di semi di girasoli o un solo vasetto di semi di lino. Togliendo due vasetti di semi di girasole si tolgono $2 \cdot 4,45 = 8,9$ euro. Togliendo un vasetto di semi di girasole e un vasetto di semi di lino si tolgono $4,45 + 6,52 = 10,97$ euro. Pertanto comprerà quattro vasetti di semi di girasole anziché sei. □

Esercizio 1.10 Scegliendo di volta in volta 3 fiori da un mazzo di 123 fiori quanti mazzetti si possono fare? È possibile fare mazzi di 5 fiori usando tutti i fiori? Motiva la risposta. E se il numero dei fiori quantuplicasse, si potrebbero fare mazzi da 5 fiori?

Soluzione. La risposta si ottiene calcolando $123 : 3 = 41$. Pertanto si possono fare 41 mazzi di fiori. Non è possibile usare tutti i fiori facendo mazzi di 5 perché 123 non è multiplo di 5. Ma se il numero dei fiori quantuplicasse avremmo $123 \cdot 5$ fiori con cui si potrebbero fare 123 mazzi di fiori. □

Esercizio 1.11 In un cesto le margherite gialle e rosse sono 1234. Si sa che le margherite bianche sono 180 in piú rispetto a quelle gialle. Quante sono le margherite bianche e quelle gialle?

Soluzione. Si calcola $1234 - 180 = 1054$ poi si divide per due ottenendo $1054 : 2 = 527$ che corrispone al numero delle margherite gialle. Mentre per calcolare il numero di margherite bianche si deve sommare 180 a 527 ottenendo 707 margherite bianche. □

Esercizio 1.12 Un pancale contiene 35 cassette di fiori e in ogni cassetta ci sono 35 mazzi di fiori e ogni mazzo è composto da 35 fiori. Quanti fiori contiene il pancale?

Soluzione. Per calcolare il numero di fiori si calcola $35^3 = 42875$. □

Esercizio 1.13 Un fruttivendolo ha 4 casse ciascuna delle quali contine 4 kg di mele. Il prezzo al kilogrammo delle mele è di 4 euro. Quanto ha speso il negoziante per comprare tutte le mele? Esprimi il risultato sotto forma di potenza.

Soluzione. Si calcola 2^6. □

Esercizio 1.14 Un fioraio ha 12 rose rosse e 30 rose gialle. Quanti mazzi di fiori uguali, aventi il maggior numero possibile di fiori dei due colori puó formare?

Soluzione. La risposta si ha calcolando il massimo comune divisore tra $(12, 30)$ uguale a 6. □

Esercizio 1.15 Due impianti di irrigazione di un prato si accendono regolarmente ogni 15 minuti e ogni 10 minuti. Se si sono accesi insieme alle 20 dopo quanti minuti si riaccenderanno di nuovo contemporaneamente?

Soluzione. Si accendo insieme ogni tot minuti pari a minimo comune multiplo tra $(15, 10)$ pari a 30 minuti. Pertanto si riaccendono alle $20 : 30$. □

Esercizio 1.16 Si hanno 54 margherite e 42 ciclamini. Si vuole preparare delle ceste di piante uguali contenenti il massimo numero di ciclamini e margherite. Quanti ne possiamo creare?

Soluzione. I cesti devono essere uguali e devono contenere il massimo numero di ciclamini e margherite pertanto calcolo il massimo comune divisore tra $(54, 42)$ pari a 6 e in ogni cesto avremo $54 : 6 = 9$ margherite e $42 : 6 = 7$ ciclamini. □

Esercizio 1.17 Il cuoco ha utilizzato per preparare il pranzo un terzo dei prodotti ortofrutticoli acquistati al mercato e i tre quinti del rimanente li utilizzerà per la cena. Se il cuoco ne aveva acquistati 30 kg quanti gliene rimarranno per preparare il pranzo del giorno seguente?

Soluzione. Per il pranzo il cuoco utilizza $\frac{1}{3} \cdot 30 = 10$ kg di prodotti, pertanto gliene rimangono i $\frac{2}{3}$ pari a 20 kg. Per la cena utilizza $\frac{3}{5} \cdot 20 = 12$ kg. Pertanto al cuoco rimangono $\frac{2}{5}$ di 20 kg di prodotti pari a 8 kg. □

Esercizio 1.18 Quattro ragazzi dipingono quattro pareti di una stanza avente tutte la stessa superficie. Ciascuno ha dipinto rispettivamente $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{13}{30}$ delle pareti. Quale ragazzo ne ha dipinto di piú, quale di meno?

Soluzione. Le frazioni $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{13}{30}$ sono rispettivamente equivalenti alla frazioni $\frac{18}{30}$, $\frac{25}{30}$, $\frac{21}{30}$, $\frac{13}{30}$. Pertanto il secondo ragazzo ne ha dipinta una quantità maggiore rispetto agli altri tre; il quarto ragazzo una quantità minore. □

Esercizio 1.19 In una cassetta di mele $\frac{3}{7}$ sono rosse e $\frac{2}{5}$ sono gialle. Se le mele verdi sono 24 quante sono in tutto le mele contenute nella cassetta?

Soluzione. Detta x la quantitá di mele della cassetta si puó risolvere l'equazione: $\frac{3}{7} \cdot x + \frac{2}{5}x + 24 = x$. Da cui si ha

$$(1 - \frac{29}{35}) \cdot x = 24 \qquad \frac{6}{35} \cdot x = 24 \qquad x = 140.$$

□

Esercizio 1.20 Un giardiniere ha eseguito $\frac{3}{7}$ di un certo lavoro e ha preso 210 euro. Appena il lavoro sará finito, quanto gli spetterà ancora?

Soluzione. Si calcola quanto spetta al giardiniere. Detto x la cifra totale si sa che

$$\frac{3}{7} \cdot x = 210 \qquad x = 490.$$

Pertanto si ha che il giardiniere deve prendere $490 - 210 = 280$ euro. □

Esercizio 1.21 Alla fine di una gara di pasticceria organizzata a competizioni distrubuite nell'arco di un anno, risulta che un cuoco ha vinto i $\frac{5}{9}$ delle commpetizioni, ne ha pareggiate $\frac{1}{9}$ e ha perso le rimanenti. Tra le competizioni perse, $\frac{1}{4}$ sono state svolte nel suo ristorante e le rimanenti in trasferta. Se le competizioni complessvamente sono state 36 quante sono state perse in trasferta?

Soluzione. Se le competizioni complessivamente sono state 36, le vinte e pareggiate sono rispettivamente $36 \cdot \frac{5}{9} = 20$ e $36 \cdot \frac{1}{9} = 4$. Pertanto le perse sono $36 - (20 + 4) = 12$ di cui $\frac{1}{4}$ nel proprio ristorante quindi le rimanenti $12 \cdot \frac{3}{4} = 9$ sono quelle svolte in trasferta. □

Esercizio 1.22 Un esame sostenuto da 150 studenti è stato superato da 50 studenti al primo appello e da 40 studenti al secondo appello. Calcola dapprima la percentuale totale dei promossi poi la percentuale dei promossi rispettivamente nel primo e nel secondo appello e stabilire in quale dei due appelli ci sono stati piú promossi.

Soluzione. Hanno superato l'esame complessivamente 90 studenti quindi per calcolare la percentuale dei promossi si calcola la proporzione

$$90 : 150 = x : 100 \qquad x = (90 \cdot 100) : 150 \quad x = 60.$$

Per calcolare la percentuale dei promossi del primo appello si calcola la proporzione

$$50 : 150 = x : 100 \qquad x = (50 \cdot 100) : 150 \quad x = 33,\overline{3}.$$

Per il calcolo della percentuale dei promossi del secondo appello si deve prima calcolare quanti studenti sono rimasti a dover superare l'esame, quindi $150 - 50 = 100$ per poi ripetere il calcolo della proporzione:

$$40 : 100 = x : 100 \qquad x = (40 \cdot 100) : 100 \quad x = 40.$$

Il secondo appello ha una percentuale di promossi piú elevato rispetto al primo. □

Esercizio 1.23 In un magazzino si devono riempire degli scatoloni con un numero uguale di barattoli di sugo scelti rispettivamente da 38 al pesto, 76 al pomodoro e 114 al pesce. Qual'è il numero massimo di scatoloni che si possono confezionare? Complessivamente quanti barattoli di sugo contterà ogni scatolone?

Soluzione. $19, 12$. □

Esercizio 1.24 Si devono tagliare tre pezzi di stoffa di $0,3$m, 78 cm e 96 cm rispettivamente in parti uguale lunghezza che sia la massima possibile. Quanto misura ciascun pezzo di stoffa? Quanti pezzi si ottengono?

Soluzione. 2 cm, 102 pezzi. □

Esercizio 1.25 Marco ha nel suo salvadanaio 128 euro. Ne spende $\frac{3}{8}$ e poi ancora $\frac{3}{8}$, quanto denaro gli rimane?

Soluzione. A Marco rimangono 50 euro. □

Esercizio 1.26 In una palestra frequentata da 110 ragazzi e ragazze, $\frac{5}{11}$ si esercitano con i pesi e dei rimanenti, $\frac{3}{10}$ eseguono gli esercizi a terra. Quanti si dedicano ai pesi e agli esercizi a terra?

Soluzione. Rispettivamente $50, 18$. □

Esercizio 1.27 La lunghezza di un segmento è 27 cm. É maggiore un segmento lungo $\frac{5}{9}$ di quello dato o un segmento lungo $\frac{2}{6}$?

Soluzione. Il primo. □

Esercizio 1.28 Scrivi sotto forma di frazione i seguenti numeri decimali:

$$0,\overline{32} \qquad 1,0\overline{4} \qquad 2,4$$

$$5,\overline{2} \qquad 3,4 \qquad 5,1\overline{5}.$$

Soluzione. Le frazioni associate ai numeri assegnati sono le seguenti:

$$\frac{32}{99} \qquad \frac{104-10}{90} = \frac{47}{45} \qquad \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{52-5}{9} = \frac{47}{9} \qquad \frac{34}{10} = \frac{17}{5} \qquad \frac{515-51}{90} = \frac{232}{45}$$

□

Esercizio 1.29 Esegui le seguenti espressioni aritmetiche:

$$7-(1+5) \qquad (15+7+1)-8 \qquad (10+3+6)-7$$

$$(44-44)-33 \qquad (88-73)+11 \qquad (32+12+13)-(7+1)$$

$$23-(10+3+7) \qquad 137-(120+2) \qquad 171-(13+15)$$

$$(60+56)+(17-12) \qquad (125-23)-(14+26) \qquad (230+120+34)-125$$

$$789-(123+13+170) \qquad 1009-45-23+34 \qquad 128-12+140-7$$

Esercizio 1.30 Riduci le seguenti espressioni a una potenza di un solo numero.

$$(6\times 6)^5 : 36^4 \qquad (11^3 \times 11^4) : 11^5$$

$$(3\times 4)^{12} : (6\times 2)^3 \qquad (15^2 \times 15^3 \times 15^4) : 15^6.$$

Soluzione. $36, 11^2; 12^9, 15^3$. $\square$

Esercizio 1.31 Riduci le seguenti espressioni a una potenza di un solo numero.

$$(5 \times 7)^6 : 5^{41} \qquad (13^2 \times 13^2) : 13^0$$
$$(7 \times 5)^0 : (6 \times 7)^0 \qquad (5^0 \times 5^6 \times 5^4) : 5^1.$$

Soluzione. $5, 13^4; 1, 5^{10}$. $\square$
.

Esercizio 1.32 Calcola il valore della seguente espressione, applicando, quando è possibile, le proprietà delle potenze.

$$4 + 2^2 \times 2^3 \times 2^2 + 1^2 \times 1^2 - 5^3 : 5^2.$$

Soluzione. 108. $\square$

Esercizio 1.33 Calcola il valore della seguente espressione, applicando, quando è possibile, le proprietà delle potenze.

$$(32^2 \times 32^3) : 32^3 + (22 \times 22^2) : 22^2 + 5^2.$$

Soluzione. 1071. $\square$

Esercizio 1.34 Calcola il valore della seguente espressione, applicando, quando è possibile, le proprietà delle potenze.

$$3^2 \times 3 + 1 + 2 \times 4 + 2^2 \times 2^3 - 7^3 : (3^2 - 2).$$

Soluzione. 19. $\square$

Esercizio 1.35 Calcola il valore della seguente espressione, applicando, quando è possibile, le proprietà delle potenze.

$$\{3 + 8 \times [5^3 \times 5^4 : 5^5 + 3 \times (10^2 - 9^2)] : 41 - 9\} : 2 + 3.$$

Soluzione. 8. $\square$

Esercizio 1.36 Calcola il valore della seguente espressione, applicando, quando è possibile, le proprietà delle potenze.

$$[(5^8 : 5^6 + 5^2) : 5 + 5 \times (5^2 + 5)] : 4^2 + 4^2.$$

Soluzione. 26. $\square$

Esercizio 1.37 Calcola il valore della seguente espressione, applicando, quando è possibile, le proprietà delle potenze.

$$[(6^9 : 6^6 + 6^2) : 3 - (7^3 : 7^3 + 7) \times 5] : 2 + 2^3.$$

Soluzione. 30. $\square$

Esercizio 1.38 Calcola il valore della seguente espressione, applicando, quando è possibile, le proprietà delle potenze.

$$\{1 + 2 \times [9^4 : 9^2 - 9 \times (2^7 : 2^5 + 3 \times 2^2 - 2^3)] - 3^2\}^2 : 20 + 5.$$

Soluzione. 10. $\square$

Esercizio 1.39 Calcola il valore della seguente espressione, applicando, quando è possibile, le proprietà delle potenze.

$$\{[2,5^2 \times 4 + (10^2 + 5) : 3] : 12 + 3\}^2 + 6^2.$$

Soluzione. 100. $\square$

Esercizio 1.40 Calcola il valore della seguente espressione, applicando, quando è possibile, le proprietà delle potenze.

$$\{[(1,5^2 + 2,5^2) : 17 + (3,4^2 - 1,6^2) : 3] \times 2 + 3\}^2 : 5 + 5.$$

Soluzione. 25. $\square$

Esercizio 1.41 Calcola il valore della seguente espressione, applicando, quando è possibile, le proprietà delle potenze.

$$\{[2 + 0,5 \times (6,1^2 - 5,3^2) + 1,2^2]^2 : 8 + 8\} \times 5 - 3 \times 20.$$

Soluzione. 20. □

Esercizio 1.42 Calcola il valore delle seguenti espressioni.

$$(3-\frac{1}{5})^2 : (5-\frac{1}{3})^2 + (1+\frac{1}{2})^2 \times (1+\frac{1}{3})^2 - (1-\frac{2}{3})^2 : (\frac{5}{6})^2.$$

Soluzione. $\frac{21}{5}$ □

Esercizio 1.43 Calcola il valore delle seguenti espressioni.

$$\frac{4+\frac{1}{9}\times(2-\frac{1}{7}:\frac{2}{7})^2-(1-\frac{1}{2})^2}{(4+\frac{1}{9})\times 2-\frac{11}{9}}\times 7+1.$$

Soluzione. 5. □

Esercizio 1.44 Calcola il valore delle seguenti espressioni.

$$\frac{(1-\frac{1}{3})^2+(1+\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\times 2}{(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}):\frac{1}{8}+1}.$$

Soluzione. 1. □

Esercizio 1.45 Calcola il valore delle seguenti espressioni.

$$\frac{(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}:\frac{2}{3}-\frac{1}{2}):\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}{(1+\frac{1}{2}:2)\times(3-\frac{7}{8}:\frac{3}{8})}:\frac{1+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}{1-\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}}+\frac{7}{45}.$$

Soluzione. $\frac{1}{3}$. □

Esercizio 1.46 Scrivi in forma estesa i seguenti numeri, espressi in notazione esponenziale.

$$1,1101\times 10^8 \qquad 3,007\times 10^{10}$$

$$9,9\times 10^5 \qquad 4,401\times 10^8.$$

Soluzione. Si scrivono come segue:

$$11010000, 3007000000, 990000, 440100000.$$

□

Esercizio 1.47 Determina l'ordine di grandezza dei seguenti numeri.

$$55 \qquad 34000 \qquad 600000000$$

$$490000 \qquad 100 \qquad 6500000000.$$

Soluzione. L'ordine di grandezza dei numeri assegnati risulta essere:

$$10^2, 10^4, 10^9, 10^5, 10^2, 10^{10}.$$

□

Esercizio 1.48 Indica la risposta corretta.
Il numero 9900 è più vicino a:

$$10^3 \qquad 10^4 \qquad 10^5.$$

Soluzione. 10^4. □

Esercizio 1.49 Indica la risposta corretta.
Il numero 12000 è più vicino a:

$$10^4 \qquad 10^5 \qquad 10^3.$$

Soluzione. 10^4. □